134. 無限聯立一次方程式ニツイテ(II)

京都工專　花井七郎　(12. 1)

L. Kantorovitch[1] ニ從ツテ，線狀座標空間ニ semi-order ヲ定義シテ，order topology ヲ導入シ，コレニヨツテ線狀座標空間ニ於テ定義サレタ無限聯立一次方程式ガ解ヲ有スルタメノ條件ヲ求メテ見ル.

線狀座標空間 λ ノ任意ノ点 $\mathfrak{x}=(x_1, x_2, \cdots\cdots)$ ノ座標 x_i ハスベテ實數トスル。λ ノ二点 $\mathfrak{x}=(x_1, x_2, \cdots\cdots)$，$\mathfrak{y}=(y_1, y_2, \cdots\cdots)$ ニ於テ $x_i \geqq y_i$ $(i=1, 2, \cdots\cdots)$ ガ成立スルトキ $\mathfrak{x} \geqq \mathfrak{y}$ ト定義スル。等号ハ $x_i = y_i$ $(i=1, 2\cdots)$ ノトキトスル。$\mathfrak{x}_+ = \sup(0, \mathfrak{x})$，$\mathfrak{x}_- = \sup(0, -\mathfrak{x})$，$|\mathfrak{x}| = \mathfrak{x}_+ + \mathfrak{x}_-$ トスルトキ，$\mathfrak{x}_+$，$\mathfrak{x}_-$，$|\mathfrak{x}|$ ガ又空間 λ ノ点トナルトハ限ラナイ。從ツテ空間 λ ガ vector 束トナルトハ限ラナイ。コレニ關シテ次ノコトガ成立スル。

【助定理】 1. λ ガ vollkommen デ且ツ局所弱コムパクトデアルトキハ，λ ハ完備ナ vector 束トナリ，且ツ弱收斂ト(O)收斂トハ一致スル。

【証明】 λ ガ vollkommen デアルカラ，從ツテ normal デアル。ソコデ λ ガ normal デアルコトヲ用ヒレバ，λ ガ完備ナ vector 束デアルコトガ容易ニ導カレル。次ニ，λ ガ vollkommen デ且ツ局所弱コムパクトデアルカラ，点列 $\{\mathfrak{x}^{(n)}\}$ ガ座標的ニ一点 $\mathfrak{x}$ ニ收斂スルコトト，$\mathfrak{x}^{(n)} \to \mathfrak{x}$ (弱) トハ一致スル.[2] 然ルニ $\mathfrak{x}^{(n)} \to \mathfrak{x}$ (O) ト $\mathfrak{x}^{(n)}$ ガ座標的ニ $\mathfrak{x}$ ニ收斂スルコトトハ同値デアル。ヨツテ $\mathfrak{x}^{(n)} \to \mathfrak{x}$ (弱) ト $\mathfrak{x}^{(n)} \to \mathfrak{x}$ (O) トハ一致スル。 〔以上〕

今元素ガスベテ實數デアル無限行列ヲ

$$\mathfrak{a} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots \\ & & & \cdots \end{pmatrix}$$

トシ，λ ノ任意ノ点 $\mathfrak{x}=(x_1, x_2, \cdots)$ ニ對シテ常ニ $y_i = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} x_k$ $(i=1, 2, \cdots)$ ハ絶對收斂シ且ツ $(y_1, y_2, \cdots)$ ガ又 λ ノ点デアルトスル。カヤウナ無限行列ノスベテヨリナル集合ヲ $\Sigma(\lambda)$ デ表ハスコトヽスル。$\Sigma(\lambda)$ ニ屬スル任意ノ行列ハ λ ノ任意ノ点ヲ λ 内ニ移ス弱連續ナ加法的作用素デアツテ，特

ニλガ *vollkommen* デアルトキハ $\Sigma(\lambda)$ ハ一ツノ Ring ニナルコトガ G. Köthe, O. Toeplitz[3] ニヨツテ証明サレテヰル。従ツテ〔助定理〕1ヨリ直チニ次ノ助定理ガ成立スル。

〔助定理〕2. λ ガ *vollkommen* デ且ツ局所弱コムパクトデアルトキハ$\Sigma(\lambda)$ニ属スル任意ノ行列ハλヲλ内ニ移ス(0)連続ナ加法的作用素デアツテ，而モ$\Sigma(\lambda)$ハ一ツノ Ring トナル。

以上ヲ準備トシテ次ニ無限聯立一次方程式ニツイテ考ヘテ見ル。

〔定理〕1. λハ *vollkommen* デ且ツ局所弱コムパクトトスル。無限行列 $\mathfrak{A}=(a_{ik})$, $a_{ik}\geqq 0\ (i,k=1,2,\cdots)$ ガ$\Sigma(\lambda)$ニ属スルトスル。方程式 $\mathfrak{x}=\mathfrak{A}\mathfrak{x}+\mathfrak{x}_0$, $\mathfrak{x}_0\geqq 0$ ($\mathfrak{x}_0$ハ既知) ガ解 $\mathfrak{x}^*\geqq 0$ヲ有スルタメノ必要且ツ十分ナル條件ハ，任意ノnニ對シテ

$$(\mathfrak{A}^n+\mathfrak{A}^{n-1}+\cdots\cdots+E)\mathfrak{x}_0<\mathfrak{x}'$$

ガ成立スル如キ $\mathfrak{x}'\in\lambda$ ガ存在スルコトデアル。但シEハ單位行列トスル。

〔証明〕. 十分ナルコト　今$V(\mathfrak{x})=\mathfrak{A}\mathfrak{x}+\mathfrak{x}_0$トスレバ　$V(0)=\mathfrak{x}_0$.

従ツテ　$0\leqq V(0)=\mathfrak{x}_0$. 然ルニ $a_{ik}\geqq 0$ デアルカラ $V(\mathfrak{x})$ハ單調増加ナ作用素デアル。

$$\therefore\quad V(0)\leqq V(\mathfrak{x}_0)=(\mathfrak{A}+E)\mathfrak{x}_0$$

同様ニシテ

$$\mathfrak{x}_0\leqq(\mathfrak{A}+E)\mathfrak{x}_0\leqq(\mathfrak{A}^2+\mathfrak{A}+E)\mathfrak{x}_0\leqq\cdots\cdots<\mathfrak{x}'$$

然ルニ〔助定理〕1ニヨツテλハ完備ナ vector 束デアルカラ　今 $(\mathfrak{A}^n+\mathfrak{A}^{n-1}+\cdots\cdots+E)\mathfrak{x}_0=\mathfrak{x}_n$ トスレバ，$\mathfrak{x}_n\to\mathfrak{x}^*(0)$ ナル $\mathfrak{x}^*\in\lambda$ ガ存在スル。一方 $\mathfrak{x}_n=V(\mathfrak{x}_{n-1})$ ガ成立スル。

然ルニ $\mathfrak{A}\in\Sigma(\lambda)$デアルカラ〔助定理〕2ニヨリ $V(\mathfrak{x})$ハ(0)連續デアル。従ツテ $n\to\infty$ノトキハ $\mathfrak{x}_n=V(\mathfrak{x}_{n-1})$ヨリ

$$\mathfrak{x}^*=V(\mathfrak{x}^*)=\mathfrak{A}\mathfrak{x}^*+\mathfrak{x}_0.$$

必要ナルコト. $\mathfrak{x}^*\geqq 0$ナル解ガ存在シタトスレバ

$$\mathfrak{x}^*=\mathfrak{A}\mathfrak{x}^*+\mathfrak{x}_0$$

従ツテ

$$\mathfrak{A}\mathfrak{x}^*=\mathfrak{A}^2\mathfrak{x}^*+\mathfrak{A}\mathfrak{x}_0$$

$\therefore\ \mathfrak{x}^* = \mathfrak{A}^2\mathfrak{x}^* + (\mathfrak{A}+E)\mathfrak{x}_0$

一般ニ $\quad \mathfrak{x}^* = \mathfrak{A}^{n+1}\mathfrak{x}^* + (\mathfrak{A}^n + \mathfrak{A}^{n-1} + \cdots\cdots + E)\mathfrak{x}_0.$

然ルニ $\mathfrak{A}^{n+1}$ ノ元素ハ $\geqq 0$, 且ツ $\mathfrak{x}^* \geqq 0$ デアルカラ, 任意ノ n ニ對シテ

$$\mathfrak{x}^* \geqq (\mathfrak{A}^n + \mathfrak{A}^{n-1} + \cdots\cdots + E)\mathfrak{x}_0 \qquad \text{〔以上〕}$$

從ツテ若シ任意ノ $\mathfrak{x}_0 \geqq 0$ ニ對應シテ $\mathfrak{x}'$ ガ存在シテ

$$(\mathfrak{A}^n + \mathfrak{A}^{n-1} + \cdots\cdots + E)\mathfrak{x}_0 < \mathfrak{x}' \quad (n=1, 2, \cdots\cdots)$$

ガ成立スルトキハ. 任意ノ $\mathfrak{x}_0 \in \lambda$, $\mathfrak{x}_0 \geqq 0$ ニ對シテ

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{A}\mathfrak{x} + \mathfrak{x}_0 \qquad \text{即チ}\ (E-\mathfrak{A})\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_0$$

ハ常ニ解 $\mathfrak{x}^* \geqq 0$ ヲ有スル. ソコデ問題ニナルノハ $E-\mathfrak{A}$ ノ逆行列ガ存在シテ $\Sigma(\lambda)$ ニ屬スルタメノ條件ハ何カト云フコトデアル. コレニ關シテ次ノ定理ヲ得ル.

〔定理〕2. λ ハ vollkommen デ且ツ局所弱コムパクトデアルトスル.

行列 $\mathfrak{A}=(a_{ik})$, $a_{ik} \geqq 0$ $(i, k = 1, 2, \cdots\cdots)$ ハ $\Sigma(\lambda)$ ニ屬スルトシ. X ヲ λ ノ任意ノ beschränkt ナ集合トスル. (Köthe, Toeplitz ノ意味デ) $S_n = \mathfrak{A}^n + \mathfrak{A}^{n-1} + \cdots\cdots + E$ トスルトキ, $S_n\mathfrak{x}$ ガ X ニ於テ一様ニ $S_\infty\mathfrak{x}$ ニ弱收斂スルトキハ (即チ任意ノ $\mathfrak{u} \in \lambda^*$, 任意ノ正數 $\varepsilon > 0$ ニ對シテ $n_1(\mathfrak{u}, \varepsilon, X)$ ガ定マリ, $n \geqq n_1(\mathfrak{u}, \varepsilon, X)$ ナルスベテノ n, 任意ノ $\mathfrak{x} \in X$ ニ對シテ $|\mathfrak{u}\cdot(S_n - S_\infty)\mathfrak{x}| < \varepsilon$ ガ成立スル), $E-\mathfrak{A}$ ノ逆行列ガ存在シテ $\Sigma(\lambda)$ ニ屬スル.

〔証明〕 $S_n\mathfrak{x}$ ハ λ ノ任意ノ beschrankt ナ集合ニ於テ一様ニ $S_\infty\mathfrak{x}$ ニ弱收斂スル故ニ, 特ニ X トシテ任意ノ $\mathfrak{x}' \geqq 0$, $\mathfrak{x}' \in \lambda$ ナル一点 $\mathfrak{x}'$ ノミヨリナル集合トスレバ 〔助定理〕1 ニヨリ λ デハ (O) 收斂ト弱收斂トー致スルカラ, 〔定理〕1 ノ証明中ヨリ $\mathfrak{x} = \mathfrak{A}\mathfrak{x} + \mathfrak{x}'$ ガ解ヲ有スルコトガ分リ, 從ツテ Kantorovitch ノ定理 [4)] ニヨツテ. 任意ノ $\mathfrak{x}_0 \in \lambda$ ニ對シテ

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{A}\mathfrak{x} + \mathfrak{x}_0$$

ハ解 $\mathfrak{x}_0^*$ ヲ有シ且ツ

$$\mathfrak{x}_0^* = (O)\text{-}\lim_{n\to\infty}(\mathfrak{A}^n + \mathfrak{A}^{n-1} + \cdots\cdots + E)\mathfrak{x}_0.$$

然ルニ λ デハ弱收斂ト (O) 收斂トハ一致スルカラ,

$$S_\infty \mathfrak{x}_0 = \mathfrak{x}_0^*$$

従ツテ $$S_\infty \mathfrak{x}_0 = \mathfrak{A} S_\infty \mathfrak{x}_0 + \mathfrak{x}_0$$

$$\therefore (E-\mathfrak{A}) S_\infty \mathfrak{x}_0 = \mathfrak{x}_0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

S_n ハ $\Sigma(\lambda)$ ニ屬スルカラ，弱連続デアル。從ツテ任意ノ $\breve{u} \in \lambda^*$ ニ對シテ，$\mathfrak{x}^{(m)} \to \mathfrak{x}$（弱）ノトキハ $|\breve{u} \cdot S_n(\mathfrak{x}^{(m)} - \mathfrak{x})| \to 0$ $(m \to \infty)$．又 $S_n\mathfrak{x} \to S_\infty \mathfrak{x}$（弱）デアルカラ $|\breve{u} \cdot (S_n - S_\infty)\mathfrak{x}| \to 0$ $(n \to \infty)$，而シテ $\mathfrak{x}^{(m)} \to \mathfrak{x}$（弱）デアルカラ，$\{\mathfrak{x}^{(m)}\}$ ハ *beschränkt* デアル。依ツテ仮定ニヨツテ，$S_n \mathfrak{x}^{(m)}$ ハ $\{\mathfrak{x}^{(m)}\}$ ニ於テ一様ニ $S_\infty \mathfrak{x}^{(m)}$ ニ弱収斂スル．
從ツテ不等式

$$|\breve{u} \cdot S_\infty (\mathfrak{x}^{(m)} - \mathfrak{x})| \leqq |\breve{u} \cdot (S_n - S_\infty)\mathfrak{x}| + |\breve{u} \cdot S_n(\mathfrak{x}^{(m)} - \mathfrak{x})|$$
$$+ |\breve{u} \cdot (S_n - S_\infty)\mathfrak{x}^{(m)}|$$

ヨリ，$m \to \infty$ ノトキハ $S_\infty \mathfrak{x}^{(m)} \to S_\infty \mathfrak{x}$（弱）デ出テ来ル．

故ニ S_∞ ハ λ 全体ヲ入内ヘ移ス弱連続作用素デアツテ，明ニ S_∞ ハ加法的デアル。

従ツテ *Köthe, Toeplitz* ノ定理[5)] ニヨツテ S_∞ ハ $\Sigma(\lambda)$ ニ属スル。

(1) ニテ $\mathfrak{x}_0$ ハ λ ノ任意ノ点デアルカラ，

$$(E-\mathfrak{A}) S_\infty = E$$

他方 $$S_n \mathfrak{A} = S_{n+1} - E$$ デアルカラ，任意ノ $\mathfrak{x} \in \lambda$ ニ對シテ

$$S_n \mathfrak{A} \mathfrak{x} = S_{n+1} \mathfrak{x} - \mathfrak{x}$$

依ツテ $n \to \infty$ ノトキハ

$$S_\infty \mathfrak{A} \mathfrak{x} = S_\infty \mathfrak{x} - \mathfrak{x}.$$

$$S_\infty (E - \mathfrak{A}) = E$$

故ニ S_∞ ハ $E-\mathfrak{A}$ ノ逆行列デアル．而シテ $S_\infty = E + \mathfrak{A} + \mathfrak{A}^2 + \cdots$ ガ成立スルコトハ仮定カラ明カデアル． 〔以上〕

〔注意〕 *Hilbert* 空間 $l^{(2)}$ ニ於ケル有界線型作用素 A ハ無限行列デ表ハサレ，A ノ *norm* $\|A\| < 1$ ナルトキハ $E-A$ ノ逆行列（有界）ガ存在シテ $(E-A)^{-1} = E + A + A^2 + \cdots\cdots$ トナルコトハヨク知ラレテヰルノデアル．

「定理」2ハ此場合特ニ無限行列Aノ各元素ガ≧0デアリ．且ツ実数座標ノ*Hilbert*空間ノ場合ノ一ツノ擴張ニナツテキル．

---

1) L. Kantorovitch; Acta Math. vol. 71 (1939) p.63−97

2) G. Köthe, Math. Ann. Vol. 114 (1937). p.99−125.

3) G. Köthe, O. Toeplitz, Journ. fur Math. Vol 171 (1934), p.193-226

4) 前記 1) ノ論文

5) 前記 3) ノ論文