140. 松島氏の談話1113より

（身延高校） 豊田 五浪

松島氏は本誌1113号で、kを$\mathfrak{p}$-進数体とし、そのAbel拡大K/kに於て、もし$N_{K/k}(A)=1$なるKの元Aが常に$B^{1-\lambda}$なる形の元のみの積として表はされるならば、K/kはzyklischになることを証明されました。茲ではそれ

に整数論的な附加を一寸させて戴きたいと思ひます. K/k を galoissch としでもその Galois 群 $\mathfrak{G}$ は可解でありますから. 単位元ならざる Abel 群を不変部分群として含みます. それを $\mathfrak{N}$ とすると, $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ は別に Abelsch でも zyklisch でもないのですが.

I. K/k を Galois 拡大とし. その Galois 群を $\mathfrak{G}$ とするとき, もし $N_{K/k}(A)=1$ なる K の元 A が $B^{1-\lambda}$ なる形の元の積で表はされるならば……$\mathfrak{G}$ の不変部分群 $\mathfrak{N}$ について. $\mathfrak{N}$ が Abelsch で $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ が zyklisch なる時, K/k は zyklisch となる.

ことを証明致します. 松島氏に依れば K/k が Abelsch となることを云へばよい事が分ります. 主に参考にしましたのは. 淡中先生本誌談話 1046 と. 中山先生の局所類体論. 及び本誌談話 1092 とです.

$$\mathfrak{G}=\mathfrak{N}+S\mathfrak{N}+\cdots\cdots+S^{f-1}\mathfrak{N}$$

として $N_{Z/k}(N_{K/Z}(A))=1$ [Z は $\mathfrak{N}$ に對応するガロア中間体] の時は $N_{K/Z}(A)=Z^{1-S}$ $(Z\in Z)$ とおけます. 中山先生 1092 により.

$$Z=a_{\mu,\nu}\,N_{K/Z}(C) \qquad (C\in K)$$

$$Z^{1-S}=N_{K/Z}\left(\frac{b_{S,\mu}}{b_{\mu,S}}, D^{1-S}\right) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$N_{K/k}\left(\frac{b_{S,\mu}}{b_{\mu,S}}\right)=1$$

ですから $\frac{b_{S,\mu}}{b_{\mu,S}}=\Pi B^{1-\lambda}$ 之は更に $\Pi B_0^{1-\mu}\ \Pi B_1^{1-S^i\nu}$ $(\mu,\nu\in\mathfrak{N})$

或ひは $\Pi B_0^{1-\mu}\ \Pi B_2^{1-\nu}\ \Pi B_3^{1-S}$ の如くなり $N_{K/Z}\left(\frac{b_{S,\mu}}{b_{\mu,S}}\right)=N_{K/Z}\left(\Pi B_3^{1-S}\right)$ $=N_{K/Z}(B_4^{1-S})$. 故に (1) と組合せて $Z^{1-S}=N_{K/Z}A_0^{1-S}$

II. $N_{Z/K}\,Z_0=1$ ならば. $Z_0\in N^*_{K/Z}$ II$'$: $N^*_{K/k}\subseteq N^*_{K/Z}$ (IIヲ俟ツ証明略)

又. 同様に $Z^{1-S}=N_{K/Z}A_0^{1-S}$ なる結果より $\frac{Z}{N_{K/Z}(A_0)}=\left(\frac{Z}{N_{K/Z}(A_0)}\right)^S$. 而して, $\frac{Z}{N_{K/Z}(A_0)}\in Z$ だから $\frac{Z}{N_{K/Z}(A_0)}=a\in k$. 故に $Z=aN_{K/Z}(A_0)$

III. $Z^* = k^* N^*_{K/Z}$

今kのKに含まれる最大Abel拡大をΛとすると, それに対応する$\mathfrak{G}$の部分群$\mathfrak{A}$は$\mathfrak{N}$に含まれる事は明らかですから.

$$k \subset Z \subseteq \Lambda \subseteq K$$

故でΛ≠Kと仮定すると, 局所類体論の終結定理 一意性定理により.

$$N^*_{K/k} = N^*_{\Lambda/k}, \quad N^*_{K/Z} \subsetneqq N^*_{\Lambda/Z}$$

従って $(Z^* : N^*_{\Lambda/Z}) < (Z^* : N^*_{K/Z})$ IIIを使って,

$$(Z^* : N^*_{\Lambda/Z}) = (k^* N^*_{\Lambda/Z} : N^*_{\Lambda/Z}) = (k^* : N^*_{\Lambda/Z} \cap k^*)$$
$$(Z^* : N^*_{K/Z}) = (k^* N^*_{K/Z} : N^*_{K/Z}) = (k^* : N^*_{K/Z} \cap k^*) \quad (Z^* = k^* N^*_{\Lambda/Z}) \text{ デアル}$$

依って. $N^*_{\Lambda/Z} \cap k^* \supsetneqq N^*_{K/Z} \cap k^*$ が結論出来ます. さて,

$a \in N^*_{\Lambda/Z} \cap k^*$ で $a \notin N^*_{K/Z} \cap k^*$ なるaをとれば $a = N^*_{\Lambda/Z}(\lambda^0)$ $(\lambda^0 \in \Lambda)$ で $a \neq N_{K/Z}(A)$. 然るに $a^f \in N^*_{\Lambda/k} = N^*_{K/k}$. 故に

$a^f = N_{K/k}(x_0)$, $N_{Z/k}(a) = N_{Z/k}(N_{K/Z}(x_0))$. $N_{Z/k}\left(\dfrac{N_{K/Z}(x_0)}{a}\right) = 1$. 従って $a \in N^*_{K/Z}$. 之れは仮定に矛盾する. 従って K=Λ. でなければなりません.

註 拡張された Chevalley の因子団の定理(秋月先生)を使って. 定理(秋月先生)を使って 定理の仮定の下に $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ が zyklisch になる事を云ひたいのですが旨く行きません. 御教示願ひます.