

141. Lie群に於ける半単純部分群芽の拡大 について

広島文理大 東郷 重明 (1948.12.18)

序 論

toroidal group の或る種の部分群芽の例を示す様だ。⁽¹⁾ Lie群 G の部分群芽 H' は之を群芽とする G の部分群に一般には拡大されない。吉田氏は G が *linear group*, H' が半単純のとき、拡大が可能であることを示された。⁽²⁾

ここでは注意の Lie 群 G に於ける半単純部分群芽 H' が如何なる条件下に拡大が可能であるかを調べよう。

まず §1 に於て群芽の拡大に関する予備的性質を述べた後、§2 に H' の *generale* する代数的部分群の単位近傍に於ける構造を調べ、この結果を用いて §3 に於て拡大可能な充分条件を述べる、そして §4 では拡大が不可能な例を上げる。

§1. Lie 群芽の拡大と環連結群の準同型写像。

G : Lie 群。

H' : G に於ける部分 Lie 群芽等 (充分小さく与えられておるとする)

H : H' によつて生成された G の代数的部分群 即ち $\Sigma H'^n$

H^* : H の閉包即ち H を含む最小の Lie 部分群。

とすればよく知られてゐる様だ。

補題 1⁽¹⁾ H' と同型な H^* から G 内への表現 $f: x^* \rightarrow f(x^*) = x$ は *unique* に拡張され、 $f(H^*) = H$ である。

補題 2⁽²⁾ 其の条件は互に同値である。

(1°) $H = H^*$ 即ち H が Lie 群になる。

(2°) H' が H^* の単位近傍になる。即ち H' が H^* の群芽。

(3°) H' が H の単位近傍になる。

(4°) f (補題 1 の) が準同型になる。

定義. 上の互に同値な条件の何れかが元ざれるとき、 H' は G に於て自己を群芽とする Lie 群に拡大されると云ふ。

§2. 単位近傍に於ける H^* の構造

以下 H' は半単純とする。

補題 3. G, H の核心を夫々 Z_G, Z_H とする。 G の単位近傍 U を元分小さくとれば、

$$Z_H \cap U \subset Z_G$$

証明. G の正則表現 $x \rightarrow D(x)$ を考へると容易に知られる様だ。 $x \in Z_G$ と $D(x) = E$ (単位行列) は同値である。半単純群の連続表現の完全可約性から適

当座一次変換を施すと,

$$x \in H \rightarrow U(x) \sim \begin{pmatrix} D_1(x) & & 0 \\ & D_2(x) & \\ 0 & & \ddots \\ & & & D_n(x) \end{pmatrix}$$

ここで $x \rightarrow D_i(x)$. $x \in H$ は既約表現 従つて $\det D_i(x) = 1$

今 $z \in Z_H$ に対しては $D_i(z) D_i(z) = D_i(z) D_i(z)$. $x \in H$ なる故.

Schur の補題から⁽⁵⁾

$$D(z) \sim \begin{pmatrix} \alpha_1 E_1 & & 0 \\ & \alpha_2 E_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & \alpha_n E_n \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \alpha_1^{d_1} = \alpha_2^{d_2} = \dots = \alpha_n^{d_n} \\ (\alpha_i \text{ は } D_i(x) \text{ の次元}) \end{matrix}$$

故に U を充分小さくとれば $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 1$.

従つて $D(z) = E$. 故に $z \in Z_G$.

定理. H' が充分小さいとき U を適当にとる.

1) $U \cap H^d = H' \times (Z_{H^d} \cap U)$

2) $U \cap H = H' \times (Z_H \cap U)$

3) $Z_{H^d} \cap U = Z_H^d \cap U$.

証明. 1) H' は H^d の不変部分群であるから Cartan の定理⁽⁶⁾ を使つて容易に H' は H^d の群芽の直積因子である. 故に G の群芽 U を適当に小さくとれば $U \cap H^d = H' \times Z$ と書ける. 従つて Z は H' と可換 H^d の定義から Z は Z_{H^d} と可換になる. 即ち $Z \subset Z_{H^d}$. 故に,

$$U \cap H^d = H' \times (Z_{H^d} \cap U)$$

2) $k \in U \cap H \subset U \cap H^d = H' \times (Z_{H^d} \cap U)$ とすれば $k = k' z$, $k' \in H'$, $z \in Z_{H^d} \cap U$ なる形に表はされる. 従つて $z = k'^{-1} k \in H$ とかかれ. $z \in Z_H$ となる. これから容易に $U \cap H = H' \times (Z_H \cap U)$

3) U を適当にとれば 1), 2) から明らかである.

§3. $H^d = H$ なるための充分条件.

§2 の定理を使へば次の場合 H' は自己を群芽とする dis 群に拡大可能である.

$D \cdot Z_G$ が *discrete* のとき.

U を充分小さくとれば $Z_H \cap U = \{e\}$ (e は G の単位元), 従つて $H \cap U = H'$,
 故に §1 補題 2. (3') を使へばよい.

例 (d) G が半單純

1) $Z_H (Z_H^*)$ の order 有限のとき.

$Z_H \cap U = \{e\}$ なる故上と同様.

例. (β) H' が複素半單純のとき:

何者. H^* は unitary 制限を行つて得られる compact real form を H_u^* とすれば, Cartan の定理⁽⁷⁾ から $Z_{H^*} = Z_{H_u^*}$. 然るに $Z_{H_u^*}$ が有限になるから.

(γ) H^* を部分 Lie 群とする複素 Lie 群 K が存在するとき (特に H^* が完閉のとき):

何者. H^* の K に於ける complexing を H_c^* とすれば, H_c^* は複素半單純である. H_c^* の核心は有限だから Z_{H^*} も有限になる.

(δ) G が複素 Lie 群のとき:

何者 H' の G に於ける complexing を H_c' とすれば, H_c' は半單純なる故 (β) から拡大可能である. 故に (α) によつて H' も拡大可能である.

さて今 $H^x \neq H$ とする. Ado-Cartan の定理⁽⁸⁾ によれば G の群 U と局所同型の linear transformation による表現が存在する. それを $x \in U \rightarrow D(x)$ とする. $Z \in Z_H \cap U$ なる Z に対して先づ U の中で e から $Z (\neq e)$ に、決して H 内で Z から e に至る道 ℓ を考へて, ℓ に沿ふて同型表現 $x \rightarrow D(x)$ を拡大するとその終点 ℓ に於て $D(Z)$ (\neq 単位行列) が得られる. 従つて Z が異なればこれらの道 ℓ は互に同位でない. として単位辺 ℓ に於ては Z_H は Z_{H^*} の中で dense であるから, 結局 G の基本群で位数の如何程にも大きいものが存在する.

H^x について云へば, H^* の核心で位数が如何程にも大きいものが存在する. 又 G は局所同型な連続表現が存在するときは上の結果から $H^x = H$ である. 故に

3) G の基本群が有限のとき.

例 (ε) G が單連結

4) G が完閉のとき.

(この場合は完備可分な位相群 G の場合に容易に拡張することが出来る.)

尚条件 1), 2), 3), 4) は交換子群 $G^{(1)}, G^{(2)}, \dots$ 或ば一般に H' を含む任意の Lie 部分群. 又は G を部分群とする任意の Lie 群について充されればよい.

§4. $H^2 \neq H$ の例.

基本群が free cyclic group $\{mc\}$ (m integer) を含む半単位群を考へる. (例えば. 実変数の homographic transformation $\pi = \frac{ax+b}{cx+d}, \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} > 0$ の全体が作る群は torus の内部と同相だからこの條件を去す.) その universal covering group を g^* とすれば, $\{mc\}$ はその核に包含される. $R = (-\infty, +\infty)$ として $g^* \times R$ を作ると Lie 群である. τ を無理数として $(mc, m\tau - n)$ の全体を D とすれば, D は核に包含される discrete は Abelian 群である.

今 Lie 群 G としての $G = g^* \times R / D$ と考へる. g^* の群芽を $g^{*'}$ とし, $g^* \times \{0\} / D = H'$ とすれば之は半単位部分 Lie 群芽である. H' から生成される群は $H = g^* \times \{0\} / D$ である. H^2 を作ると Kronecker の定理⁽⁹⁾ から $(mc, 0) / D = (\pm, -m\tau + n) / D$ は m, n に適当にえらぶと R の単位近傍を稠密に蔽ふ 故に

$$H^2 = (g^* \times \{0\} / D)^2 = g^* \times R / D = G.$$

参考文献

(1) 例へば Pontryagin: Topological groups. 264

(2) K. Yoshida: A theorem concerning the semi-simple Lie group, Tôhoku Math J. ; 44 (1937)

(3) 例へば Pontryagin: 和訳. 228. 定理 63.

(4) 同上, 65. 定理 13.

(5) この証明法は吉田: 前掲による.

(6) L. Cartan: Thèse. 53

(7) E. Cartan: In géométrie des groupes simples, Annali di Math. 2 (1927) 特に 250-251. F. Gantmacher: On the classification of real simple Lie groups. Recueil Math. 47 (1939) 54.

(8) E. Cartan: Les représentations linéaires des groupes de Lie, *Journal de Math.*, 17 (1938) 1-12.

(9) 例へば Pontryagin: 前掲. 150.