143. P. Alexandroff ノ問題及ビ空間ノ分離公理ニツイテ

（阪大）　白田　平

P. Alexandroff ハ "Bikompakte Erweiterungen topologischen Räume"（Rec. Math 47）デ completely regular, non normal space R ニ関シテソノ Čech ノ extension βR ト regular end ニヨル extension αR（§1）ハ如何ナルトキニ一致スルカヲ考ヘタガ、$\alpha R \approx \beta R$ 及ビ $\alpha R \not\approx \beta R$ トナル R ノ例ハ未知トシテヰル. コヽデ $\alpha R \approx \beta R$ トナル例ヲ与ヘル 更ニ R ガ normal デナクトモ成立スルコトガ分ル. コレニ関聯シタ分離ノ公理ヲ §2 デ導ク.
尚 コノ問題ニハ関係シナイガ 二、三ノ分離公理ノ関係ヲ述ベヤウ.

§1. 定義 1.1］ space X ノ regular end トハ 次ノ條件ヲ満足スル開集合ノ family $\mathfrak{F}$ デアル.

i) $\forall G \in \mathfrak{F} \quad \exists G' \in \mathfrak{F} \quad \overline{G'} \subset G$

ii) finite intersection property ヲ持ツ

iii) i), ii) ヲ満足スル極大ナ性質ヲ持ツ.

［定義 1.2］ completely regular end トハ (i) ノ代リニ ii) 及ビ iii) ト

i') $\forall G \in \mathfrak{F} \quad \exists G' \in \mathfrak{F} \quad G \supset G'$ 且

$X - G$ ト $\overline{G'}$ ハ 連続函数 f ニヨリ分離サレル

即チ $f(x) = 1 \qquad x \in G^c = X - G$

$f(x) = 0 \qquad x \in \overline{G'}$

ヲ満足スル family デアル.

i') ハ i'') ト同等ナ條件デアル

i'') $\forall G \in \mathfrak{F} \quad \exists G' \in \mathfrak{F}$

open covering $\{G, X - \overline{G'}\}$ ハ normal covering トナル

(Tukey: Convergence and uniformity in Topology P.53)

〔定義・1・3〕 αX トハ スベテノ regular end ノ system ニ次ノ様ニ topology ヲ導入シタ空間デアル.

G ヲ X ノ任意ノ開集合トスレバ コノトキ

$$\Gamma_G = \{\mathfrak{F} \mid \mathfrak{F} \in \alpha X,\ \mathfrak{F} \ni G\}$$

ヲ αX ノ open basis トスル.

(註) $\alpha' X$ トハ completely regular end ノ system ニ定義1・3ト全ク同様ナ topology ヲ導入シタ空間デアル. X ガ completely regular ナラバ, コノトキ $\alpha' X$ モ completely regular トナリ, 且 $\alpha' X \approx \beta X$ ナルコトガ知ラレテキル.

次ニ簡単ナ殆ンド自明デアル定理ヲ述ベル.

〔定理1・1〕 $\alpha X \approx \beta X$ ナルタメニハ スベテノ regular end ガ completely regular end トナルコトデアル. ココデ X ハ completely regular トスル.

(註) end $\mathfrak{F}$ ヲ次ノトキ vanishing ト云フ 即チ $\prod_{G \in \mathfrak{F}} G = \phi$ (空集合)

若シ vanishing デナイ αX ノ element $\mathfrak{F}$ ヲ $a = \prod_{G \in \mathfrak{F}} G$ ニ対応サセルトキ X ハ αX ノ中ニ 位相的ニ含マレルコトガ分ル.

カカルモノヲ証明ニオイテ考ヘル.

〈証明〉 十分ナルコトハ明ラカ 逆ニ $\alpha X = \beta X$ トスル αX ハ勿論 completely regular デアルカラ $\mathfrak{F}_0 \in \alpha X$ 且 $G \in \mathfrak{F}_0$ トスレバ Γ_G ハ $\mathfrak{F}_0$ ノ αX ニオケル開近傍デアル. 依テ

$$\exists f:\ \text{有界連続函数} \qquad f(\mathfrak{F}) = 1 \quad \text{on } \Gamma_G^c$$
$$f(\mathfrak{F}_0) = 0$$

今 $\{\mathfrak{F} \mid f(\mathfrak{F}) < \frac{1}{2}\} = U$ トスレバ U ハ $\mathfrak{F}$ ノ 開近傍デアル

依テ

$$\exists G':\ X \text{ ノ開集合} \qquad \Gamma_{G'} \subset U \quad \text{且} \quad \Gamma_{G'} \ni \mathfrak{F}$$

ナゼナラバ $G' \in \mathfrak{F}$ ハ $\mathfrak{F}$ ノ完全近傍系デアルカラ.

$\Gamma_{G'} \frown X = G'$ $\quad \Gamma_G \frown X = G$ デアルカラ

$$f(x) = 1 \quad \text{on } G^c \qquad f(x) \leqq \frac{1}{2} \quad \text{on } \overline{G'}$$

即チ G^c ト $\overline{G'}$ ハ 連続函数ニヨリ分離サレルコトガ分ル.

〔例 1.1〕 $S_1 = W(w_1+1)$, $S_2 = W(w+1)$ トシ 夫々順序ニヨリ ヨク知ラレテヰル Topology ヲ入レル. 且 $S = S_1 \times S_2$ $T = S - (w_1, w)$ トスル. コノトキ βT 　αT ヲ云フ.

ココデ T ハ completely regular. non normal デアルコトハ既知. ノタメニ lemma ヲ云フ.

(lemma) V_1, V_2 ヲ T ノ開集合デ 次ノ條件ヲ満足スルモノトスル.

i) $V_1 \supset \overline{V_2}^T$ 　　ii) $\overline{V_2}^S \ni (w_1, w) = P$

コノトキ $\exists n_0 (< w)$, $\alpha_0 (< w_1)$ 　$\forall \alpha \geqq \alpha_0$, $n \geqq n_0$

$\overline{U_2}^T \ni (\alpha, w)$ 且 $\overline{V_1}^T \ni (\alpha, n)$

(寺阪先生ニヨル)

(殆ンド明ラカナノデ 方針ダケヲ述ベル)

$\overline{V_2}^S \ni P$ デアルカラ P ノ任意ノ近クニ V_2 ノ点ガ 非　　ケアル 依テ $\exists n_i$ 　$\lim\limits_{i \to w} n_i = w$ 　　$\exists \lambda_0$ 　　$\forall \lambda > \lambda_0$

$\overline{U_2}^T \ni (\lambda\ n_i)$ 　依テ $\overline{V_2}^T \ni (\lambda\ w)$ 　更ニ $V_1 \supset U_2{}^T$ デアルカラ 　$(\exists\ n_0)_{\binom{\lambda > \lambda_0}{n > n_0}}$ $(\overline{V_1}^T \ni (\lambda, n))$

サテ コノトキ T ノ regular end $\mathfrak{F} - \{G\}$ デ $(\exists G \in \mathfrak{F})$ $(\overline{G}^S\ P)$ ナラバ $\overline{G}^T = \overline{G}^S$ ハ compact ナルコトヨリ $\mathfrak{F}$ ハ vanishing デハナイ. 依テ $\mathfrak{F}$ ガ $\alpha T - T$ ニ属スルタメニハ $(\forall G \in \mathfrak{F})(\overline{G}^S \ni P)$ デナケレバナラヌ 然ルニ lemma ニヨリカカル 2ツノ $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$ ヲトレバ, ソレラノ element ハ常ニ相交ハル 依テ $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{F}_2$ デナケレバナラヌ 依テ $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{F}_2$ 　更ニカカル vanishing end ハ completely regular デアルコトモ lemma ヨリ容易ニ分ル 即チ,スベテノ regular end ハ completely regular end デアル. 依テ 定理 1.1 ヨリ、$\alpha T = \beta T$ デアル.

§2. Type $(\mathfrak{D} > \mathfrak{D}')$-normal space

$\mathfrak{D}$, 及ビ $\mathfrak{D}'$ ヲ アル directed system トスル

〔定義 2.1〕 space X ノ2ツノ fremd ナ閉集合 F, F' ヲ $(\mathfrak{D}, \mathfrak{D}')$-separated ト次ノトキニ云フ

i) $\forall \delta \in \mathfrak{D},\ \delta' \in \mathfrak{D}'\ \ \exists G_\delta,\ G_{\delta'}$ Xノ開集合

ii) $F \subset G_\delta,\quad F' \subset G_{\delta'}$ 且 $G_\delta \cap G_{\delta'} = \phi$

iii) $\delta_1 < \delta_2\ (\delta_1' < \delta_2')$ ナラバ $\overline{G}_{\delta_1} < G_{\delta_2}\ (\overline{G}_{\delta_1'} < G_{\delta_2'})$

特ニ $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}' = N = \{1, 2, \cdots\cdots n\}$ ナルトキ N-separated トスフ. 更ニ 単ニ $F \cap F' = 0$ ノトキ 0-separated ト云フコトニシヤウ.

〔定義 2.2〕 space X ヲ Type $(\mathfrak{D}, \mathfrak{D})$-normal space デアルト次ノトキニ云フ.

スベテノ $(\mathfrak{D}, \mathfrak{D}')$-separated ナ閉集合 F, F' ハ (λ, λ)-separable デアルトキ ココデ λ ハ有理数ノ全体デ大小関係ニヨリ順序ヲ入レタ directed system トスル.

言ヒ換エレバ $(\mathfrak{D}, \mathfrak{D}')$-separated ナ閉集合 F, F' ハ連続函数ニヨリ分離サレルコトデアル.

特ニスベテノ $N(0)$-separated ナ閉集合ガ (λ, λ) separated デアルトキ type $N(0)$-normal space ト云フコトニスル.

$\mathfrak{D}_1 \supset \mathfrak{D}_2$ 且 $\mathfrak{D}_1' \supset \mathfrak{D}_2'$ ナラバ type$(\mathfrak{D}_2, \mathfrak{D}_2')$-normal space ハ type $(\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_1')$-normal space デアル. type 0-normal space ハ普通ノ normal space デアリ 且 コレニヨリ一種ノ抽象空間ノ分類ガ出来ル.

今, 有用ナノハ type N-normal space デアル.

〔定理 2.1〕 Xガ Type N-normal 且 completely regular space ナラバ, $\alpha X \approx \beta X$

(証明) $\mathfrak{F}$ ヲ任意ノ regular end トスル. コノトキ completely regular end ニナルコトヲ云ヘバヨイ. regular end デアルコトヨリ

$\forall G \in \mathfrak{F}\quad \exists G_i\quad i = 1, 2, \cdots\cdots 2n+1$

$G_i \in \mathfrak{F}\quad \overline{G}_i \subset G_{i-1}$ 且 $\overline{G}_1 \subset G$

コノトキ G_{2n+1} ト G^c ハ N-separated 依テ 連続函数ニヨリ分離サレル.

[系] スベテノ Δ-refinement ヲ有スル X ノ finite open covering ハ normal covering デアルトキ $\alpha X = \beta X$ トナル.

T_2-space デ non normal 且 type 2-normal space

区間 [0 1] デ 0以外ハ普通ノ近傍ヲ有シ 0デハ 0ヲ含ムアル区間ヨリ $\frac{1}{n}$ ($n=1,2,\cdots\cdots$) ヲ除イタモノトスレバヨイ.

§3. normal以上ノ space ニ関シテ.

9等デ 距離空間ノ fully normality ニ就イテ デ completely normal デモ fully normal デナイ例 及ビ fully normal デ perfectly normal デナイ ヲ挙ゲタ. 今 perfectly normal デモ fully normal デナイ例トシテ

[例 3.1] $W(\omega_1)$ ハ 求メルモノデアル

(証明) コレガ perfectly normal デアルコトハ明ラカ. fully normal デナイコトハ 任意ノ open covering $\mathfrak{U}$ ヲトレバ.
$\mathfrak{U}^*$ ハアル $\{\mu / \mu > \mu_0\}$ ヲ含マネバナラヌコトヲ云ヘバヨイ.
若シ シカラザレバ $(\forall\mu)(\exists\mu'(\mu) > \mu)$ $(\mu'(\mu) \notin S(\mu, \mathfrak{U}))$
トナル. 任意ノ μ_1 ヲトリ $\mu_2 = \mu'(\mu_1)$, $\mu_{n+1} = \mu'(\mu_n)$
トスル. $\{\mu_n\}$ ハ アル $\mu' < \omega_1$ ニ収斂スル $\mu' \in U \in \mathfrak{U}$ トスレバ $\exists n_0$ $n_0 \leq n$ ナラバ $\mu_n \in U$
依テ $\mu_{n_0+1} \in S(\mu_{n_0}, \mathfrak{U})$ コレハ μ_{n_0+1} ノ定義ニ反スル.

更ニ perfectly normal 且 fully normal デ metric space デナイ例トシテ

[例 3.2] 実数ノ集合デ 点 a ノ近傍トシテ $\{x \mid b < x \leqq a\}$ ナル集合ヲトル. コレハ perfectly normal 更ニ Lindelöf ノ定理ガ成立スル 依テ スベテノ open covering ハ countable subcovering ヲ含ム. コノトキ森田氏ノ定理 perfectly normal *space* ニオイテ *countable open covering* ハ *normal* デアル ヨリ コノ *space* ガ *fully normal* デアルコトガ分ル.

次ニ 分離ノ公理トシテ

A, B ガ $\bar{A}\cdot B + \bar{B}\cdot A = 0$ ナラバ $\exists f$: 連続

$$A \subset \{x \mid f(x) > 0\} \qquad B \subset \{x \mid f(x) < 0\} \qquad |f(x)| \leqq 1$$

ヲ満足スル空間ヲ考ヘル コレヲ今 *semi-perfectly normality* ト名付ケルコトニシヤウ. コノトキ容易ニ分ルヤウニ *semi perfectly normal* ナラバ *completely normal*. *perfectly normal* ナラハ *semi perfectly normal* デアルコトガ分ル. 更ニ *completely normal space* ガ *semi perfectly normal* デアルタメニ 必要且ツ十分ナ條件ハ スベテノ開集合ノ閉包ガ G_δ 集合デアルコトガ分ル.