144. 或ル無限小変換ニ就テ

朝長康郎 (Dec. 21. 1948)

§0. 本誌第二輯第七号談話69デ述ベタ空間ノ事ヲ再ビ記スト R_n ヲ基本二次形式ガ g_{ij} ノ n次元Riemann空間トシ 其ノ各点 x^i ニ ∞^{n+1}個ノ超球ノ集リデアル空間ヲ接触サセル.

超球ヲ表スノニ

$$V^\lambda = \begin{cases} V^i \ (\lambda = i) \cdots\cdots \text{超球ノ中心ヲ表ス} R_n \text{ノ反変ベクトル.} \\ V^0 \ (\lambda = 0) \cdots\cdots \text{超球ノ半径ヲ表ス} R_n \text{ノスカラ}\text{ ---} \end{cases} \tag{0.1}$$

ヲ以テスル。以下ギリシャ添字ハ 0カラ n迄 ラテン添字ニ超球 V^λ W^λ ノ間ノ共通切線距離ノ自乗ハ、

$$D^2 = g_{\lambda\mu}(V^\lambda - W^\lambda)(V^\mu - W^\mu) \tag{0.2}$$

但シ

$$g_{\lambda\mu} = \begin{cases} g_{ij} & (\lambda = i,\ \mu = j) \\ 0 & (\lambda = i,\ \mu = 0) \\ -1 & (\lambda = 0,\ \mu = 0) \end{cases} \tag{0.3}$$

デ定義スル。隣同志ノ超球空間ノ関係ヲ表ス。超球ノ共変微分ハ

$$\delta V^{\lambda} = dV^{\lambda} + \Gamma^{\lambda}_{\mu k} V^{\mu} dx^{k} \tag{0.4}$$

デ與ヘル。$\Gamma^{\lambda}_{\mu k}$ ハ共通切線距離ノ不変性カラ 次ノ條件ヲ満足シナケレバナラナイ。

$$\frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x^{i}} = g_{\sigma\mu}\Gamma^{\sigma}_{\lambda i} + g_{\sigma\lambda}\Gamma^{\sigma}_{\mu i} \tag{0.5}$$

尚 茲デ

$$\Gamma^{\sigma}_{ij} = \Gamma^{\sigma}_{ji} \tag{0.6}$$

ヲ要請スレバ

$$\left\{ \begin{aligned} &\Gamma^{i}_{jk} = \left\{ {i \atop jk} \right\} = \frac{1}{2} g^{im} \left(\frac{\partial g_{mj}}{\partial x^{k}} + \frac{\partial g_{mk}}{\partial x^{j}} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^{m}} \right) \\ &\Gamma^{o}_{ij} = g_{im}\Gamma^{m}_{oj} \\ &\Gamma^{o}_{ok} = 0 \end{aligned} \right. \tag{0.7}$$

トナル。又 (0.6) ト違ッテ

$$\Gamma^{i}_{jk} = -\Gamma^{i}_{kj}, \quad \Gamma^{o}_{jk} + \Gamma^{o}_{kj} = 0 \tag{0.8}$$

トシテモ。(0.7) ハ成立ツ。 (0.8) ハ談話 69 デ述ベタ様ニ

Einstein-Myer ノ統一場理論ヲ與ヘルモノデアル。

§1. 以上ノ如ク構成サレタ Laguerre 接続空間ノ各点ニ一ツノ超球ガ分布シテヰルトスル。其ノ式ヲ

$$V^{\lambda} = V^{\lambda}(x) \tag{1.1}$$

トシ、之ニ次ノ無限小変換ヲ加ヘル。

$$\bar{V}^{\lambda} = V^{\lambda} + \varepsilon \xi^{\lambda} \tag{1.2}$$

ε ヲ無限小トスル。即チ、点ハ其ノママニシテ超球ダケヲ少シズラスノデアル。其ノ際 隣接ニ超球間ノ共通切線距離ノ変化ハ次ノ様デアル。

$$\begin{aligned} &g_{\lambda\mu}(\delta\bar{V}^{\lambda} + dx^{\lambda})(\delta\bar{V}^{\mu} + dx^{\mu}) - g_{\lambda\mu}(\delta V^{\lambda} + dx^{\lambda})(\delta V^{\mu} + dx^{\mu}) \\ &= \varepsilon\{g_{\lambda\mu}(\delta V^{\lambda} + dx^{\lambda})\delta\xi^{\mu} + g_{\mu\lambda}(\delta V^{\mu} + dx^{\mu})\delta\xi^{\lambda}\} + \varepsilon^{2}(\quad) \end{aligned} \tag{1.3}$$

茲デ、ε ノ係数ヲ 0 トオケバ

$$(1.4)\quad g_{\lambda\mu}\left(\frac{\partial V^\lambda}{\partial x^j}+\Gamma^\lambda_{\pi j}V^\pi+\delta^\lambda_j\right)\left(\frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^k}+\Gamma^\mu_{\sigma k}\xi^\sigma\right)$$
$$+\,g_{\lambda\mu}\left(\frac{\partial V^\lambda}{\partial x^k}+\Gamma^\lambda_{\pi k}V^\pi+\delta^\lambda_k\right)\left(\frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^j}+\Gamma^\mu_{\sigma j}\xi^\sigma\right)=0$$

即チ　無限小変換(1.2)ガ超球群(1.1)ノ共通切線距離ヲ変ヘナイ為ニハ

ξ ガ(1.4)ヲ満足シナケレバナラヌ。(1.4)ニ於テ　特ニ

$$V^\lambda=0$$

即チ　最初ノ超球群ガ実ハ点デアッタ場合ハ　(1.4)ハ

$$(1.5)\quad g_{jm}\left(\frac{\partial \xi^m}{\partial x^k}+\Gamma^m_{\sigma k}\xi^\sigma\right)+g_{km}\left(\frac{\partial \xi^m}{\partial x^j}+\Gamma^m_{\sigma j}\xi^\sigma\right)=0$$

トナル。　(1.5)ハ R_n ノ各点ガ $\varepsilon\xi^\lambda$ ナル無限小超球ニ変化シタトキ

隣接2点間ノ距離ガ対応スル隣接2超球間ノ共通切線距離ト2次ノ無限小ヲ

除イテ一致スル事ト同値デアル。

$$g_{im}\,\xi^m=\xi_i$$

トオケバ　(1.5)ハ

$$(1.6)\quad \xi_{j\|k}+\xi_{k\|j}+\xi^0\left(\Gamma^0_{jk}+\Gamma^0_{kj}\right)=0$$

トナル。　茲ニ

$$(1.7)\quad \xi_{j\|k}=\frac{\partial \xi_j}{\partial x^k}-\left\{{m \atop jk}\right\}\xi_m$$

(1.6)デ2通リノ場合ヲ考ヘル。

$$(1.8)\begin{cases}(a)\quad \xi_{j\|k}+\xi_{k\|j}=-2\xi^0\Gamma^0_{jk} & \left(\Gamma^0_{jk}=\Gamma^0_{kj}\right)\\[2ex] (b)\quad \xi_{j\|k}+\xi_{k\|j}=0 \qquad \text{ト} & \left(\Gamma^0_{jk}=-\Gamma^0_{kj}\right)\end{cases}$$

(1.6)ヲ無限小 *Laguerre* 変換ト呼ブコトニスル。

§2.　(1.8)ハ4通リノ場合ガ考ヘラレル。先ヅ $\boxed{(1.8)b:}$ ハ *Killing* ノ方程式デアルカラ、之ガ最大 $\frac{n(n+1)}{2}$ 個ノ任意常数ヲ含ム解ヲ持ツノハ R_n ガ定曲率空間ノ場合ニ限ルコトハ周知ノ通リデアル。 ξ ノ方ハ何デモヨイ。即チ $\Gamma^0_{jk}=-\Gamma^0_{kj}$ ノ場合ハ問題ハ非常ニ簡単ニナル。

$$dx^\lambda=\begin{cases}dx^i & (\lambda=i)\\ 0 & (\lambda=0)\end{cases}$$

$\boxed{(1.8)\ a}$ 之ニハ 三通リノ場合ガ考ヘラレル.

(A) $$\begin{cases} \xi^0 = 0 \\ \xi_{j|k} + \xi_{k|j} = 0 \end{cases}$$

之ハ Killing ノ方程式デアルカラ前ト全ジコトニナル. 此ノ場合ハ点ガ点ニ移行スルカラ実ハ R_n ノ無限小運動デアル.

(B) $$\begin{cases} \Gamma^0_{jk} = \rho g_{jk} \\ \xi_{j|k} + \xi_{k|j} = -2\rho \xi^0 g_{jk} \end{cases}$$

之ハ R_n ノ無限小共形変換ノ式デアル. 最大ノ任意常数ヲ含ム解ヲ有スルノハ R_n ガ共形的ニ平坦ナ場合ニ限ルコトガ知ラレテヰル.*

(C) 次ニ一般ノ場合即チ(A)デモ(B)デモナイ場合.

此ノ場合.(1.8.a)ノ完全積分可能條件ヲ求メル事ハ容易ナ事デハナイ. 然シ(1.8.a)ガ仮リニ一ツノ解 ξ^λ ヲ許シタトスレバ Γ^0_{ij} ハ次ノ形ヲ取ル.

(2.1) $$\Gamma^0_{ij} = -\frac{\xi_{j|k} + \xi_{k|j}}{2\xi^0}$$