148. 共軛計量Riemann空間に就いて（改題）〔VI〕

（京都師範）田畑不二夫（1949. 2. 18）

□24 2. $\eta = \sqrt{g_{lm}(u^\lambda)\dot u^l \dot u^m} \div v(u^\lambda, \dot u^l/\sqrt{g_{lm}\dot u^l \dot u^m})$

と置いて変分法の常套に依って $\frac{\delta}{dk}\int_{P_0}^{P_1} n(u^\lambda, \frac{du}{ds})\, ds = \frac{\delta}{dk}\int_0^1 n\,dt$

$= \frac{\partial n}{\partial \dot u^l}\frac{\delta u^l}{dk}\Big|_0^1 + \int_0^1 \left(\frac{\partial n}{\partial u^l} - \frac{d}{dt}\frac{\partial n}{\partial \dot u^l}\right)\frac{\delta u^l}{dk} + \frac{\partial n}{\partial t}\frac{\delta t}{dk}\,dt$ 之に $(\delta u^l)_0$

$= 0(\delta u^l)_1$ 及び $\frac{\partial (g_{lm}du^l du^m \div v^2)}{\partial du^\nu}\delta u^\nu = \frac{\partial n^2}{\partial \dot u^n}dt\,\delta u^n - 2dt\,\delta t$

$= 0$ を用ふれば（□24）$\frac{d}{dt}\frac{\partial n}{\partial \dot u^l} = \frac{\partial n}{\partial u^l} + n\frac{\partial n}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial \dot u^l}$

即 $\ddot u^l + \{^l_{\mu\nu}\}\dot u^\mu \dot u^\nu - \frac{1}{2v^2}\frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial t}\dot u^\lambda \dot u^\mu \dot u^l + v g^{l\lambda}\frac{\partial v}{\partial u^\lambda} + \left(\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{2}{v}\frac{\partial v}{\partial u^\lambda}\dot u^\lambda\right)\dot u^l$

$- \frac{2}{v}\dot u^l \frac{\partial v}{\partial \dot u^n}\ddot u^n + g^{la}\Big[\Big\{\frac{\partial v}{\partial \dot u^a}\frac{\partial v}{\partial \dot u^n} + \left(\frac{1}{2v}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial t}\dot u^\alpha \dot u^\beta - v\right)\frac{\partial^2 v}{\partial \dot u^a \partial \dot u^n}\Big\}\ddot u^n$

$+ \Big\{\frac{\partial v}{\partial \dot u^a}\frac{\partial v}{\partial u^\nu} + \left(\frac{1}{2v}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial t}\dot u^\alpha \dot u^\beta - v\right)\frac{\partial^2 v}{\partial \dot u^a \partial u^n}\Big\}\dot u^n + \frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial \dot u^a}\Big] = 0$

是が

$s = v(u^\lambda, \frac{du^l}{ds})$ なる最も一般の場合に於ける可変計量の *Riemann* 空間

$R(ds^2 = g_{lm}(u^l, t)du^l du^m;\ l, m = 1, \dots\dots, n)$ に於ける測地線の方程式で特に v = 常数なる時は それは $\ddot u^l + \frac{1}{2} g^{la}\left(\frac{\partial g_{ma}}{\partial u^n} + \frac{\partial g_{na}}{\partial u^m} - \frac{\partial g_{mn}}{\partial u^a}\right)\dot u^m \dot u^n + g^{la}\frac{\partial g_{ma}}{\partial t}\dot u^m - \frac{1}{2v^2}\frac{\partial g_{mn}}{\partial t}\dot u^m \dot u^n \dot u^l = 0,$

$g_{mn}\dot u^m \dot u^n = v^2$　$\dot u^l = \frac{du^l}{dt}$ の形を採る。（□24. 中 指標を a, l と誤記した所あり．本論により御訂正を乞ふ）

□31. x^l *Euclid* 空間中で運動する流体中の一固有点を原点にとった時の速度を $v^l(x^\lambda)$ として $(x^0 = t)$．v^l が x^λ の正則函数とする $\frac{dx^l}{dt} =$

$v^l(x^\lambda)$ の解が又原点で正則として $(x^l)_0=u^l$ なる解を $x^l(u^\lambda)$ として

$S_{lm}=\frac{\partial x^i}{\partial u^l}\frac{\partial x^i}{\partial u^m}$ を求むれば $\left(\frac{\partial v^l}{\partial u^m\partial t}\right)_0$ を v^l_m 等を表す事に依り

$$S_{lm}=\delta_{lm}+\frac{1}{1!}\Big[(v^l_m+v^m_l)+\frac{1}{1!}(v^l_{mn}+v^m_{ln})u^n+\frac{1}{2!}(v^l_{mnp}+v^m_{lnp})u^nu^p\Big]t+\frac{1}{2!}\Big(v^l_{m0}+v^m_{l0}+v^l_p v^p_m+v^m_p v^p_l+2v^p_l v^p_m\Big)+\frac{1}{1!}\Big(v^l_{mn0}+v^m_{ln0}+v^l_p v^p_{mn}+v^m_p v^p_{ln}+v^l_{mp}v^p_n+v^m_{lp}v^p_n+v^l_{np}v^p_m+v^m_{np}v^p_l+2v^p_l v^p_{mn}+2v^p_m v^p_{ln}\Big)u^n\Big]t^2+\cdots$$

或は $S_{lm}=\delta_{lm}+\frac{1}{1!}(v^l_m+v^m_l)t+\frac{1}{2}(v^l_{m0}+v^m_{l0}+v^l_p v^p_m+v^m_p v^p_l+2v^p_l v^p_m)t^2+\cdots\cdots$ を得る

後の式は一般のRに対して役に立つ 特に座標軸を歪軸に持続して重なるやうに採るならば $S_{11}=1+2v^1_1t+(v^1_{10}+2v^{1\,2}_1)t^2+\cdots\cdots$, $S_{12}=(v^1_1-v^2_2)v^1_2t^2+\cdots\cdots$ 即 歪度及び 歪速度の変化 v^1_1, v^1_{10} 等及 固有な接触空間 P 中での 歪軸の回転速度 Vector D^l: (v^1_2, v^2_3, v^3_1) 等が $\frac{\partial S_{lm}}{\partial t}$ $\frac{\partial^2 S_{lm}}{\partial t^2}$ から求まる事を示す.

□ 32. 前節の D^l を別法で求めよう。歪軸に固定された空間を ξ^λ 方向に平行と見る計量移変を $S^l_{mv}+D^l_m t_0$. 歪軸 Vector を $C^l_{(a)}(t)$ とすれば $\left(\frac{1}{2}\frac{\partial S_{lm}}{\partial t}-\lambda_{(a)}S_{lm}\right)C^m_{(a)}\equiv A_{(a)lm}C^m_{(a)}=0$, $\frac{\partial C^l_{(a)}}{\partial t}+(S^l_{m0}+D^l_m)C^m_{(a)}\equiv B^l_{(a)}=0$ $\frac{\partial A_{(a)lm}}{\partial t}C^m_{(a)}-A_{lm}\frac{\partial C^m_{(a)}}{\partial t}=0$ 及 $A_{(a)lm}B^l_{(a)}=0$ より $\frac{\partial C^m_{(a)}}{\partial t}$ を消去して $\left(\frac{\partial A_{(a)lm}}{\partial t}+A_{(a)lm}S^m_{n0}+A_{(a)lm}D^m_n\right)C^n_{(a)}=0$ 一般に $\lambda_{(a)}$ $(a=1,\cdots,n)$ は互に異るからその時 $D_{lm}=-D_{ml}$ が求まる.

□ 6.4. $\mathfrak{V}^\lambda$ は規準空間 $\mathfrak{N}$ の点を $\mathfrak{M}$ から見たときの速度 Vector を表はすと考へられる $\mathfrak{M}$ の点の流線が $\mathfrak{N}$ で定常なるための条件は $\frac{\partial\mathfrak{V}^l}{\partial t}\,/\!/\,\mathfrak{V}^l$ にして その上 $\mathfrak{V}^\lambda$ が定常の条件は $\frac{\partial\mathfrak{V}^\lambda}{\partial t}=0$ なり

□6.3.1 $\mathfrak{N}$ が Riemann 空間 即 $\mathfrak{U}^\lambda$ が運動を表はす條件は $A_{lm}=0$ (□.6.2) で $A_{lm}\equiv\mathfrak{U}_{l;m}+\mathfrak{U}_{m;l}+\frac{\partial S_{lm}}{\partial t}=0$ (共変微分は S^i_{lm} に依る. 以下同じ) の形となる. 即 Killing の方程式の拡張なり.

□33. $\mathfrak{N}$ が Riemann 空間 $\mathfrak{N}$ 中で 定常運動の條件は $\frac{\partial\mathfrak{U}^l}{\partial t}=0$, $A_{lm}\equiv\frac{\partial S_{lm}}{\partial u^a}\mathfrak{U}^a+\underline{S_{la}}\frac{\partial\mathfrak{U}^a}{\partial u^m}+\underline{S_{ma}}\frac{\partial\mathfrak{U}^a}{\partial u^l}=0$, $B_{lm}\equiv\frac{\partial\underline{S_{lm}}}{\partial u^a}\mathfrak{U}^a+\underline{S_{la}}\frac{\partial\mathfrak{U}^a}{\partial u^m}+\underline{S_{ma}}\frac{\partial\mathfrak{U}^a}{\partial u^l}=0$ ($\underline{S_{lm}}\equiv\frac{\partial S_{lm}}{\partial t}$) の形 或は 次の二式から一般に $\mathfrak{U}^l$, $\frac{\partial\mathfrak{U}^l}{\partial u^m}$ について 代数的に一意に解ける事から之に第一式を加へて その積分條件を S_{lm}, $\underline{S_{lm}}$ を以て表す事が出来る.

□34. 変形主軸を $C^l_{(m)}$ とせば $(\lambda_{(m)}S_{la}-\frac{1}{2}\underline{S_{la}})C^a_{(m)}=0$.

$S_{lm}C^l_{(m)}C^m_{(m)}=\lambda^2_{(m)}$ 之等に $\frac{\partial}{\partial u^a}\mathfrak{U}^a$ を operate すれば

$\frac{\partial\lambda_{(m)}}{\partial u^a}\mathfrak{U}^a=F_{(m)}$, $\frac{\partial C^l_{(m)}}{\partial u^a}\mathfrak{U}^a-\frac{\partial\mathfrak{U}^l}{\partial u^a}C^a_{(m)}\equiv E^l_{(m)}$ とおいて

$F_{(m)}S_{la}C^a_{(m)}+(\lambda_{(m)}A_{la}-\frac{1}{2}B_{la})C^a_{(m)}+(\lambda_{(m)}S_{la}-\frac{1}{2}\underline{S_{la}})E^a_{(m)}=0$ ∴ 一般に $A_{lm}=0=B_{lm}$ と $F_{(m)}=0=E^l_{(m)}$ とは全等で 後の方は $C^l_{(m)}$ が $\mathfrak{U}^\lambda$ 方向に不変なる事 即 $\mathfrak{N}$ の点に密着してそこを流れる流体の変形が定常なる為の條件を物語ってゐる.

□35. □5.2 の $A^\lambda_{\mu\nu}$ により, $\mathfrak{U}^\lambda$ に固有な Vector 野 V^l が (□6.3) $\mathfrak{U}^\lambda$ 方向へ平行なる為の條件は / $D_{lm}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\mathfrak{U}_l}{\partial u^m}-\frac{\partial\mathfrak{U}_m}{u^l}\right)$ で 従って之が $\mathfrak{N}$ 中に於ける $\mathfrak{P}$ の回転 Tensor なる事を示し $\frac{\partial\mathfrak{U}_l}{\partial u^m}=\frac{\partial\mathfrak{U}_m}{\partial u^l}$ は吾々の場合にも無渦動の條件を表わしてゐる.

□36. $\mathfrak{P}$ が 何等かの規準方向に対して回転 (絶対回転すると考へられるとき この絶対平行は $A^l_{m\nu}=S^l_{m\nu}+D^l_m t_\nu$ で表わされ. $n=3$ のときは 絶対回転速度 Vector は $\epsilon^{cab}D_{ab}$. なり.

□37 上の $A^o_{m\nu}$ 及び $S^l_{m\nu}$ より $A^\wedge{}_{\mu\nu\omega}$ Δ $S'^{\lambda}_{\mu\nu\omega}$ を作れば

$A^{o}_{\cdot\mu\nu\omega} = S^{\cdot\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega} = 0 = A^{\cdot\lambda}_{\cdot o\nu\omega} = S'^{\lambda}_{\cdot o\nu\omega}$， $A^{\ell}_{\cdot mn\omega} = S^{\nu}_{\cdot mn\omega}$

$A^{\ell}_{\cdot mno} = D^{\ell}_{\cdot mno} - D^{\ell}_{\cdot mjk}$ であって ′2の誘りの式より $\epsilon^{i\alpha\lambda} S_{\alpha\beta n\alpha}$

du^{n} は $P(u^{i},t)$ と，その中に S^{ℓ}_{mn} 接続された $P(u^{i}+du^{i},t)$

との間の相互回転速度 Vector・□22の $\partial^{\ell}_{n} du^{n}$）を表はし $S^{\ell}_{\cdot mno}=0$

は 無歪動の條件なり．又に $S'_{\lambda\mu\nu\omega} = S_{\lambda\alpha} S'^{\alpha}_{\cdot\mu\nu\omega} + \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial^2 S_{\mu\omega}}{\partial u^{\lambda}\partial u^{\nu}}$

$+ \frac{\partial^2 S_{\lambda\nu}}{\partial u^{\mu}\partial u^{\omega}} - \frac{\partial^2 S_{\mu\nu}}{\partial u^{\lambda}\partial u^{\omega}} - \frac{\partial^2 S_{\lambda\omega}}{\partial u^{\mu}\partial u^{\nu}}\Big) - S_{\alpha\beta}\left(S^{\alpha}_{\lambda\omega} S^{\beta}_{\mu\nu} - S^{\alpha}_{\lambda\nu} S^{\beta}_{\mu\omega}\right)$

≡（テンソル）≡ $S_{\lambda\mu\nu\omega}$，$S'_{\lambda\mu\nu\omega} = S_{\nu\omega\lambda\mu}$ に注意したい。

□38. 明かに $S_{\lambda\mu\nu\omega} = S_{\nu\omega\lambda\mu} = -S_{\nu\omega\mu\lambda}$，$S_{\lambda\mu\nu\omega}$
$+ S_{\lambda\nu\omega\mu} + S_{\lambda\omega\mu\nu} = 0$ であるが V^{ℓ} を固有 Vector とするとき

$V^{\ell}_{j00} =$

$S^{\ell}_{00m} V^{m}$ なる事から S^{ℓ}_{00m} は，$V^{\ell}_{j0} = S^{\ell}_{0m} V^{m}$ にて S^{ℓ}_{0m} が変形速度 Tensor に当るものであったのに因んで，変形加速度とも云ふべきものである事が判る．