153　集合函数列の一性質（II）

（山梨工専）黒崎　　達（4.15）

§3.　今回は測度が定義されてゐる空間に於ける集合函数について考えて見たい。前回の談話のはじめに述べた σ-Körper $\mathfrak{K}$ とし この分では有限測度の可測集合 E の可測な部分集合のつくる σ-Körper とする。以下、集合 X の測度を $\mu(X)$ とかく。

この $\mathfrak{K}$ で定義された σ-加法的集合函数 $\Phi(X)$ は絶対連続な集合函数 $\Psi(X)$ 及び 特異な集合函数 $\Theta(X)$ の和として表はされ $\Psi(X)$ 及び $\Theta(X)$ も亦 σ-加法的である。而して $\Phi(X)$ に対して $\mu(H)=0$ なる一集合 H が確定して、E−H を CH とかけば

$$\Psi(X) = \Phi(X \cap CH)$$

$$\Theta(X) = \Phi(X \cap H), \quad \Theta(X \cap CH) = 0.$$

である。以下、$\Phi(X)_n$ についても同様の記号によることにする。

定理4.

$X \in \mathfrak{M}$ に対して常に $\Phi(X) = \lim\limits_{n\to\infty} \Phi_n(X)$ $|\Phi(X)| < \infty$ ならば

$$\Psi(X) = \lim_{n\to\infty} \Psi_n(X), \quad \Theta(X) = \lim_{n\to\infty} \Theta_n(X).$$

である.

(証明).

$$\Theta(X) = \Phi(X \cap H) = \lim_{n\to\infty} \Phi_n(X \cap H)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \Theta_n(X \cap H) \quad \cdots\cdots \; \cdots\cdots (5.1)$$

一方

$$\Theta_n(X) = \Phi_n(X \cap H_n) = \Phi_n(CH \cap X \cap H_n) + \Phi_n(H \cap X \cap H_n)$$

$$= \Phi_n(CH \cap X \cap H_n) + \Theta_n(H \cap X)$$

今 $A = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} H_i - H$ とおけば $\mu(A) = 0$ であるから

$$\Phi_n(A \cap X) = \Theta_n(A \cap X) = \Phi_n(CH \cap X \cap H_n)$$

一方 $\Phi(A \cap X) = \Theta(A \cap X) = \Phi(A \cap X \cap H) = 0$ であるから

$$\lim_{n\to\infty} \Phi_n(CH \cap X \cap H_n) = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \Theta_n(X) = \Theta(X)$$

従って 之と $\Phi(X) = \lim\limits_{n\to\infty} \Phi_n(X)$ とから

$$\lim_{n\to\infty} \Psi(X) = \Psi(X) \qquad \text{(終)}$$

§4. 次にEを測度が定義されてゐる可分距離空間の可測集合であって, $\mu(E) < \infty$ とする. この空間に於て $\Phi_n(X)$ は絶対連続な σ-加法的集合函数で $X \in \mathfrak{M}$ に対して

$$-\infty < \Phi(X) = \lim_{n\to\infty} \Phi_n(X) < \infty$$

であるとする. 尚, 以下に於て $D\Phi(\bar{x})$ とかけば之は $\Phi(X)$の点xに於ける *derivative in abstract space*[1] を意味するものとする.

定理5.

$\mu(A)>0$ $A\in\mathfrak{M}$ なる 集合Aに於て $\Phi(X)$が 恒等的に0で ある場合． $X\subset A$， $X\in\mathfrak{M}$ に対して つねに

$$\lim_{n\to\infty}\Phi_n(X)=0 \qquad \lim_{n\to\infty}\Phi_n(X)=0$$

である為には $\{D\Phi_n(x)\}$が Aに於て 0に漸近収斂 することが．必要且つ十分である。

証明は直接にも出来るが 吉田氏： 線形作用素 p.8 によれば簡単である．

定理6.

$\Phi(X)$ は $\mu(X)>0$なる集合Xに於て 恒等的に0になることはないとする．この場合．殆んどすべての $x\in X$ に対して

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} D\Phi_n(x)\geqq 0 \text{ か又は } \overline{\lim}_{n\to\infty} D\Phi_n(x)\leqq 0$$

であるならば

$$\Phi^+(X)=\lim_{n\to\infty}\Phi_n^+(X)，\ \Phi^-(X)=\lim_{n\to\infty}\Phi_n^-(X)$$

が成り立つ．

（証明）

$$\Phi(X)=\int_X D\Phi(x)\,dx，\quad \Phi_n(X)=\int_X D\Phi_n(x)\,dx$$

とかける。 今

$$A_k=(x;\ x\in X,\ D\Phi_n(x)\geqq 0,\ n\geqq k)\,;$$
$$B_k=(x;\ x\in X,\ D\Phi_n(x)\leqq 0,\ n\geqq k)$$

とおけば $A_k\subset A_{k+1}$． $B_k\subset B_{k+1}$ であって，A_kの殆んどすべての点で $D\Phi(x)\geqq 0$， B_kの殆んどすべての点で $D\Phi(x)\leqq 0$ である。

上の事から

$$\lim_{n\to\infty}\Phi_n^+(A_k)=\lim_{n\to\infty}\Phi_n(A_k)=\Phi(A_k)$$
$$=\Phi^+(A_k)\cdots\cdots(4.1)$$

---

1) S. Saks. ibid.

次に、$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A$, $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = B$ とおけば

$$A \supset Y \quad \text{ならば} \quad \Phi(Y) \geqq 0$$

$$B \supset Y \quad \text{ならば} \quad \Phi(Y) \leqq 0$$

であるから、$A \subset P \cap X$, $B \subset N \cap X$ である。（P, N は前回定義した集合）

然るに 仮定により $\mu(X - A \cup B) = 0$ であるから

$$A = P \cap X, \quad B = N \cap X$$

であると考へてよい。さて (4.1) によれば任意の正整数 k に対して

$$\lim \Phi_n^+(A_k) = \Phi^+(A_k)$$

正数 ε に対して 正数 δ が存在して、$\mu(Y) < \delta$ ならば

$$|\Phi^+(Y) - \Phi_n^+(Y)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

なることが $\Phi(X)$ 及び $\Phi_n(X)$ の一様絶対連続性から云はれる。又この δ に対して正整数 m を、$\mu(X - A_m \cup B_m) < \delta$ である様に とることが出来る。従って

$$|\Phi^+(X - A_m \cup B_m) - \Phi_n^+(X - A_m \cup B_m)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

上のようにとられた ε と m に対し 正整数 n_0 が存在して、$n \geqq n_0$ ならば $|\Phi_n^+(A_m) - \Phi^+(A_m)| < \frac{\varepsilon}{2}$

即ち、$n \geqq n_0$ ならば

$$|\Phi_n^+\{X - (X - A_m)\} - \Phi^+\{X - (X - A_m)\}| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$|\Phi_n^+(X) - \Phi^+(X)| < \frac{\varepsilon}{2} + |\Phi^+(X - A_m) - \Phi_n^+(X - A_m)|$$

然るに $\Phi^+(B_m) = \Phi_n^+(B_m) = 0$ であるから

$$|\Phi_n^+(X) - \Phi^+(X)| < \frac{\varepsilon}{2} + |\Phi^+(X - A_m \cup B_m) - \Phi_n^+(X - A_m \cup B_m)|$$

即ち、

$$\Phi^+(X) = \lim \Phi_n^-(X)$$

$\Phi^-(X)$ についても全様。（終）