157. 独立確率変数の収斂

北大、あつち まさひこ　1949.2.18

以下に取扱う(実)確率変数 $x_1, x_2, \cdots\cdots$ は凡て互に独立で

$$P(|x_i| \leqq K) = 1, \quad i = 1, 2, \cdots\cdots$$

且つ一般性を失うことなく各々の平均値は 0 としておく.

〔定理 1〕 確率変数 $x_1, x_2, \cdots\cdots$ に於て

$$E_i = E(x_i \geqq \delta), \quad \delta > 0$$

とすれば

$$P(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i) = 0.$$

〔証明〕 $P(\cap E_i) > 0$ と仮定する

$$P(\cap E_i) = \pi P(E_i)$$

依って任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$P(E_i) > 1 - \varepsilon, \quad i > N$$

$$\begin{aligned}
m(x_i) &= \int x_i P(d\omega) \\
&= \int_{E_i} x_i P(d\omega) + \int_{\Omega - E_i} x_i P(d\omega) \\
&\geqq \delta . P(E_i) - K\ P(\Omega - E_i) \\
&\geqq \delta(1 - \varepsilon) - K\varepsilon \\
&= \delta - (\delta + K)\varepsilon.
\end{aligned}$$

ε は任意だったから

$$> 0 \qquad i > N.$$

と出来る.

これは $m(x_i) = 0, \ i = 1, 2, \cdots\cdots$ なる仮定に反する.

〔注意〕 上の証明と同様にすれば

$$E_i = E(x_i \leqq -\delta), \quad \delta > 0$$

$$P(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i) = 0.$$

〔定理 1〕 $x_1, x_2, \cdots\cdots$ が x に概収斂すれば

$P(x=0)=1$

〔証明〕

$$E'_n \equiv \bigcup_{p=1}^{\infty} \bigcap_{n=p}^{\infty} E\left(x_n > \frac{1}{n}\right)$$

$$E_n \equiv \left(x > \frac{1}{n}\right)$$

$$E''_n = E_n - E_n \cap E'_n$$

$$\omega \in E''_n$$

とすれば $x_n(\omega) \leqq \frac{1}{n}$ となる n が無数にある。

又 $x(\omega) > \frac{1}{n}.$

従って $x_1(\omega), x_2(\omega), \cdots\cdots$ は $x(\omega)$ に収斂しない。

即ち

$$P(E'')=0$$

$$P(E_n)=P(E_n \cap E'_n)$$

$$P(E'_n) \geqq P(E_n \cap E'_n)=P(E_n)$$

〔定理 1〕より

$$P\left\{\bigcap_{n=p}^{\infty} E\left(x_n > \frac{1}{n}\right)\right\}=0$$

$$P(E'_n)=0$$

$$P(E_n)=0$$

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)=P(x>0)=0$$

同様に

$$P(x<0)=0$$

〔定理 3〕 $x_1, x_2, \cdots\cdots$ が x に確率収斂すれば概収斂して

$P(x=0)=1$

〔証明〕 $x_1, x_2, \cdots\cdots$ の適当な部分列は x に概収斂し

従て 〔定理 2〕より

$$P(E) \equiv P(x \neq 0)=0$$

$x_1(\omega), x_2(\omega), \cdots\cdots$ が 0 に収斂しないとすれば適当な部分列.

$\{y_i(\omega)\}$ を $a \neq 0$ に収斂させることが出来る。

変数列 $y_1, y_2, \cdots\cdots$ の概収斂する部分列をとれば その極限は x であるが、

$$x(\omega) = a \neq 0$$

だから $\quad \omega \in E$

$P(E) = 0$ だから $x_1, x_2, \cdots\cdots$ は 0 に概収斂する。

（定理3. は 共立社、近代数学全書 河田敬義著、確率論参照）