161. 代数方程式の根の限界に関する掛谷の問題について.

長岡高校　　小 倉 久 雄

数学論文集、雑録（共立社）に清水辰次郎氏の論文「代数方程式の根の限界について」があります。その中に次の事が附加されている。

「$f(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots\cdots+a_1x+a_0=0$ の係数が悉く正の実数にて $a_1>a_0$，$a_2>2a_1$，$a_3>2(a_2-a_1)+a_1$，$a_4>2(a_3-a_2)+a_2$．$\cdots\cdots$．$a_{n-1}>2(a_{n-2}-a_{n-3})+a_{n-3}$，$a_n>2(a_{n-1}-a_{n-2})+a_{n-2}$ なる條件がありとせば $f(x)=0$ の根の限界は如何なるべきか。

此の問題は 現在諸谷氏によって提出せられているが未だ興味ある真の限界が得られていない」 云々……

この問題について拙解を述べて見ます。御高評を頂ければ幸いであります。

証明を述べるに当って、次のよく知られた定理を用います。

（定理） 実方程式 $a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots\cdots+a_1x+a_0=0$

の係数が正ならば 根は $r=|x|=r'$ なる円輪の内にある。

但し r，r' は

$$\frac{a_{n-1}}{a_n},\ \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}},\ \cdots\cdots\cdots,\ \frac{a_0}{a_1}$$

の中の最小値 及 最大値である。

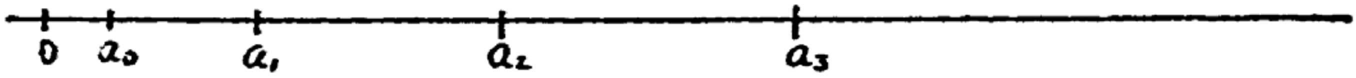
I. さて、諸谷の問題の條件を

$$a_i-2a_{i-1}+a_{i-2}>0,\quad i=1,2,3,\cdots\cdots,n$$

但し $a_{-1}=0$ と定める。　と書けば

$$a_0<a_1-a_0<a_2-a_1<\cdots\cdots\cdots<a_n-a_{n-1}$$

図示すれば



右に進むにつれて 間隔が広くなる。

$$a_0<a_i-a_{i-1}\qquad i=1,2,3,\cdots\cdots,n$$

又 $a_n\geqq a_i\qquad i=1,2,3,\cdots\cdots,n$

之より $\dfrac{a_0}{a_n}<\dfrac{a_i-a_{i-1}}{a_i}$

故に $\dfrac{a_{i-1}}{a_i}<1-\dfrac{a_0}{a_n}\qquad i=1,2,\cdots\cdots,n$

依って $1-\dfrac{a_0}{a_n}$ は 次の各分数より大である。

$$\frac{a_0}{a_1},\ \frac{a_1}{a_2},\ \cdots\cdots\cdots,\ \frac{a_{n-1}}{a_n}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\ (1)$$

$f(x)=0$ の根を x とすれば

$$|x| < 1-\frac{a_0}{a_n}$$

又 $a_0 \leqq a_{i-1} \quad i=1,2,\cdots\cdots n$

$a_n \geqq a_i \quad i=1,2,\cdots\cdots,n$　　iの同じ値に対して同時に等号をとることはない

故に $\dfrac{a_0}{a_n} < \dfrac{a_{i-1}}{a_i} \quad i=1,2,\cdots\cdots,n$

依って $\dfrac{a_0}{a_n}$ は(1)の何れよりも小である。

故に $\dfrac{a_0}{a_n} < |x| < 1-\dfrac{a_0}{a_n}.$

II. 掛谷の條件の不等式を逆にした

$$a_i-2a_{i-1}+a_{i-2} \leqq 0. \qquad i=2,3,\cdots,n$$

が成立するとき 根の限界は どうなるであろうか。

$$\frac{a_{n-1}}{a_n}-\frac{a_{n-2}}{a_{n-1}}=\frac{a_{n-1}^2-a_na_{n-2}}{a_na_{n-1}}$$

仮定によれば $2a_{n-1} \geqq a_n+a_{n-2} \qquad \therefore\ a_{n-1} \geqq \dfrac{a_n+a_{n-2}}{2}$

依って $a_{n-1}^2-a_na_{n-2} \geqq \left(\dfrac{a_n+a_{n-2}}{2}\right)^2-a_na_{n-2}=\left(\dfrac{a_n-a_{n-2}}{2}\right)^2 \geqq 0$

故に $\dfrac{a_{n-1}}{a_n} \geqq \dfrac{a_{n-2}}{a_{n-1}}$

同様にして $\dfrac{a_{n-1}}{a_n} \geqq \dfrac{a_{n-2}}{a_{n-1}} \geqq \dfrac{a_{n-3}}{a_{n-2}} \geqq \cdots\cdots \geqq \dfrac{a_0}{a_1}$

依って 定理により $\dfrac{a_0}{a_1} \leqq |x| \leqq \dfrac{a_{n-1}}{a_n}$

以上を纏めて 次の結果を得る。

方程式 $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots\cdots+a_1x+a_0=0$

の係数が正であって、

$$a_i-2a_{i-1}+a_{i-2}>0 \qquad i=1,2,\cdots\cdots,n \quad (a_{-1}=0)$$

ならば根は $\dfrac{a_0}{a_n}<|x|<1-\dfrac{a_0}{a_n}$

なる円輪の内にあり、

$$a_i-2a_{i-1}+a_{i-2} \leqq 0 \qquad i=2,3,\cdots\cdots,n$$

ならば根は $\dfrac{a_0}{a_1} \leqq |x| \leqq \dfrac{a_{n-1}}{a_n}$

なる円輪の内にある。

注意・ 関谷氏の條件の初の二つの式

$$a_1 > a_0, \qquad a_2 > 2a_1$$

は $a_1 > 2a_0$， $a_2 > 2a_1 - a_0$ としないと第三次下の式と形が揃わない嫌がある。

次に 最初にあげた引用定理の証明は 次のようにしてはどうでしょうか、

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots\cdots + a_1 x + a_0 = 0 \cdots\cdots (1)$$

(1)に $(x-K)$ をかけて

$$(x-K)f(x) = a_n x^{n+1} + (a_{n-1} - Ka_n)x^n + (a_{n-2} - Ka_{n-1})x^{n-1} + \cdots\cdots$$
$$+ (a_0 - Ka_1)x - a_0 K = 0 \cdots (2)$$

方程式(2)の根の限界は次の方程式の根(唯一つの正根) r_0 によって与えられる。

$$a_n x^{n+1} - |a_{n-1} - Ka_n| x^n - |a_{n-2} - Ka_{n-1}| x^{n-1} - \cdots\cdots - |a_0 - Ka_1| x - a_0 k = 0 \cdot (3)$$

今 $a_{n-1} - Ka_n \leqq 0$. $a_{n-2} - Ka_{n-1} \leqq 0$, ...,

$$a_0 - Ka_1 \leqq 0 \qquad \cdots\cdots\cdots (4)$$

(4)なる関係があるとき (3)と(2)とは同一の式となる。

即ち (2)は $x = K$ なる唯一つの正根を有する。即ち $K = r_0$

(2)の根は半径 K なる円の中にある。依って(1)の根も亦半径 K なる円の中にある。

(4)を書換えると、 $\dfrac{a_{n-1}}{a_n} \leqq K$, $\dfrac{a_{n-2}}{a_{n-1}} \leqq K$, ..., $\dfrac{a_0}{a_1} \leqq K$.

依って $\dfrac{a_{n-1}}{a_n}$, $\dfrac{a_{n-2}}{a_{n-1}}$, ..., $\dfrac{a_0}{a_1}$ の最大値を K に選べば、

之を半径とする円の内にある。

(1)の逆数を根とする方程式は

$$g(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots\cdots + a_{n-1} x + a_n = 0 \cdots (5)$$

之について前と同様に論ずれば

(5)の根の絶対値は $\dfrac{a_1}{a_0}$, $\dfrac{a_2}{a_1}$, ..., $\dfrac{a_{n-1}}{a_{n-2}}$, $\dfrac{a_n}{a_{n-1}}$

の最大値より小であるか又は等しい逆数で言えば (1)の根の絶対値は

$$\frac{a_0}{a_1}, \frac{a_1}{a_2}, \ \cdots\cdots, \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}}, \frac{a_{n-1}}{a_n}$$

の最小値に等しいか又はそれより大である。

依って定理は証明された。 (4月2日)