162．Riemann空間の無限小collineationに就て

朝長 康郎 (1949.5.11)

§1. *Riemann* 空間 R_n 内に一つの無限小点変換

(1.1) $$\bar{x}^\lambda = x^\lambda + \varepsilon \xi^\lambda(x)$$

を行ったとき 測地線

(1.2) $$\frac{d^2 x^\lambda}{ds^2} + \left\{ {\lambda \atop \mu\omega} \right\} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\omega}{ds} = 0.$$

が又 他の測地線に移行するとき (1.1) を無限小相称(*Collinea-tion*)と呼び．其の必要充分なる條件は $\xi^\lambda(x)$ が 次の関係を滿足することである．[1]

(1.3) * $$\xi^\lambda_{;\mu;\nu} + R^\lambda_{\cdot\mu\nu\omega}\xi^\omega = 0$$

之は特別な場合として無限小運動

(1.4) $$\xi_{\lambda;\mu} + \xi_{\mu;\lambda} = 0$$

を含むものである．無限小運動に就く *S. Bochner* [2] は Compact で *Ricci curvature* が到る所負の *Riemann* 空間には 一経数運動群が存在しない ことを証明した．

然るに実は 同じ條件の下に 無限小相称でさえ存在しない事が分るのである．

[定理] 閉ぢた可符号な正定値の *Riemann* 空間で ξ^λ が零でない限り 常に

$$R_{\lambda\mu}\xi^\lambda\xi^\mu < 0$$

ならば 無限小擬似相称は存在しない．

[証明] 若し 無限小擬似相称 $\bar{x}^\lambda = x^\lambda + \varepsilon\xi^\lambda(x)$ が存在したとすると

(1.5) $$\xi_{\lambda;\mu;\nu} + R_{\lambda\mu\nu\omega}\xi^\omega = 0 \qquad (\xi_\lambda = g_{\lambda\mu}\xi^\mu)$$

が成立つ．

(1.6) $$\varphi = \xi_\lambda \xi^\lambda$$

と置き ラプラシアン Δ を造る．

(1.7) $$\Delta = \varphi_{,\lambda,\mu} g^{\lambda\mu}$$

計算すれば次の様になる．

(1.8) $$\Delta = 2\underbrace{\xi_{\lambda;\mu;\nu}}_{(1.5)\text{から}}\xi^\lambda g^{\mu\nu} + 2\xi_{\lambda;\mu}\xi^{\lambda;\mu}.$$

---

* 詳しく云へば 擬似相称 即ちパラメーターの変換が擬似的なものである．

(1.9) $\Delta = -2R_{\lambda\mu\nu\omega}\xi^{\lambda}\xi^{\omega}g^{\mu\nu} + 2\xi_{\lambda;\mu}\xi^{\lambda;\mu}$ 書き直せば

(1.10) $\Delta = -2R_{\lambda\omega}\xi^{\lambda}\xi^{\omega} + 2\xi_{\lambda;\mu}\xi^{\lambda;\mu}$

仮設に依り第一項は ξ^{λ} が 0 でない限り正. 第2項も負でないから,

Δ を空間全体に積分したものは正となる.

(1.11) $\int \Delta\, dv > 0$ （dv は体積素）

然るに T.Y. Thomas の定理〔3〕に依れば閉じた可符号の *Riemann* 空間では一般に

(1.12) $\int \Delta\, dv = 0$

でなければならないから．（1.11）と矛盾する． 従って

(1.13) $\xi^{\lambda} = 0$

でなければならない。即ち 無限小擬似相似変換は 存在しないことになる．

（了） （4.20.1949）

〔 文 献 〕

〔1〕 矢野健太郎 擬似又は計量空間に於ける無限小変形.
〔理学〕 1947. Vol. 1. No. 2~4. PP 49–56

〔2〕 S.Bochner. *Curvature and Betti numbers.*
Ann. of. Math. 1948. P. 379.

〔3〕 T.Y. Thomas. *Some simple applications of Green's theorem for compact Riemann space.*
1940. Tohoku. Math. J. Vol. 46. PP. 261–266.