# 163. Fourier級数ノ総和可能性ニツイテ

松村　積己　(1949.5.21)

$$\frac{a_0}{2} - \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x) \qquad \cdots\cdots(1)$$

ヲ積分可能ナ実函数 $f(x)$ ノ Fourier 級数トシ

$$S_0(x),\ S_1(x),\ S_2(x),\ \cdots\cdots,\ S_n(x). \qquad \cdots\cdots(2)$$

ヲソノ部分和トスル。Lebesgue ハ系列(2)ガ殆ド到ル処 $f(x)=(C,1)$ 総和可能ナルコトヲ証明シタガ、之ニ対シテ Z. Zalcwasser ハ

$$S_{1^2}(x),\quad S_{2^2}(x),\ \cdots\cdots,\ S_{n^2}(x),$$

ガ殆ド到ル処 (C,1) 総和可能ナルコトヲ証明シタ[1]).

之ヲ更ニ一般化シテ　次ノ定理ヲ得ル.

**定理.**　積分可能ナ実函数 $f(x)$ ノ Fourier 級数 (1)ニ対シテ殆ド到ル処

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{S_{1^k}(x)+S_{2^k}(x)+\cdots\cdots+S_{n^k}(x)\right\}=f(x)$$

($k$ ハ　正整数)

**証明**

$$\frac{1}{n}\left\{S_{1^k}(x)+S_{2^k}(x)+\cdots+S_{n^k}(x)\right\}-f(x)$$
$$=\frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}\varphi(t)\frac{H_n(t)}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt=I_n \qquad \cdots\cdots\cdots(3)$$

ココニ $\varphi(t)=f(x+t)+f(x-t)-2f(x)$, $H_n(t)=\sum_{\nu=1}^{n}\sin\left(\nu^k+\frac{1}{2}\right)t$

デアル. シカラバ

$$|H_n(t)|\leqq\left|\sum_{\nu=1}^{n}e^{i(\nu^k+\frac{1}{2})t}\right|=\left|\sum_{\nu=1}^{n}e^{i\nu^k t}\right|$$

コノ最後ノ式ヲ評価スルタメ van der Corput ノ定理

$g(u)$ $(a\leqq u\leqq b)$ ヲ $k$回微分可能ナ実函数トスル　若シモ恒ニ
$g^{(k)}(u)\geqq r$ 或ハ $\leqq -r$ ($r$ ハ $u$ ニ無関係ナ正数) ナラバ

$$R=\frac{1}{b-a}\left|g^{(k-1)}(b)-g^{(k-1)}(a)\right|,\quad K=2^k\ (k\geqq 2)\ \text{トオケバ}$$

$$\left|\sum_{a\leqq x\leqq b}e^{2\pi i g(x)}\right|\leqq 21(b-a)\left[\left(\frac{r}{R^2}\right)^{-\frac{1}{K-2}}+\left\{r(b-a)^k\right\}^{-\frac{2}{K}}+\left\{\frac{r(b-a)}{R}\right\}^{-\frac{2}{K}}\right]$$ ヲ

今　$g(u)=\frac{u^k t}{2\pi}$　トオケバ　$g^{(k-1)}(u)=\frac{k!}{2\pi}ut$,
$g^{(k)}(u)=\frac{k!}{2\pi}t$　$(t>0)$.　$u$ ニ無関係ナル故之ヲ $r$ トオク

$a=0$, $b=n$ トスレバ　$R=\frac{k!}{2\pi}t\ (=r)$

従ッテ　$2^k=K$,　$A=\left(\frac{k!}{2\pi}\right)^{\frac{1}{K-2}}$,　$B=\left(\frac{k!}{2\pi}\right)^{-\frac{2}{K}}$,　トオクトキ

$$\left|\sum_{\nu=1}^{n}e^{i\nu^k t}\right|\leqq 21n\left\{At^{\frac{1}{K-2}}+B(n^k t)^{-\frac{2}{K}}+n^{-\frac{2}{K}}\right\}\cdots\cdots(4)$$

(3)ヲ次ノ如ク分ケテ夫々評価スル.

$$I_n=\frac{1}{n\pi}\left[\int_0^{1/n^k}+\int_{1/n^k}^{1/n}+\int_{1/n}^{\delta}+\int_{\delta}^{\pi}\right]=I_1+I_2+I_3+I_4$$

---

1) Z. Zalcwasser, Sur la sommabilités des séries de Fourier. Studia Mathematica 6 (1936). pp. 82-88.