165. 凸集合の或種の拡張について I
(星型集合)

田村 孝行　(1949. 4. 14)

§1. 記号の規約

Ω を Euclid 2次元空間とし Ω における点を x, y, a, …… 等で, 点集合を X, Y, A, …… 等で表し. M' は M の餘集合, $\overline{M}$ は M の closure, M^i は M の内成分 (すべての内点の集合) M^o は外成分 (すべての外点の集合), M^* は M の境界, ϕ は 空集合を表す. 特に注意すべき記号として

(イ) 線分, 半直線 等の点集合に関する記号

[x, y] は x, y を含む閉線分, 特に [x, x] は x 一点を表す. 以下 $x \neq y$ とする.

(x, y) は $[x, y]$ から x 及び y を除く部分

$[x, y)$ は $[x, y]$ から y だけを除く。 $(x, y]$ も同様

$\overline{[x, y]}$ は x, y を含む直線

$[\overrightarrow{x, y})$ は x を起点とし y 方向への半直線。 $[\overleftarrow{x, y}]$ も同様。

$(x, \vec{y}]$ は $[\overrightarrow{x, y}] - [x, y)$ 　　$(\overleftarrow{x}, y)$ も同様。

$(x, \overline{y})$ は $[\overrightarrow{x, y}] - (x, y]$ 　　$(\overleftarrow{x}, y)$ も同様。

$[\overleftarrow{x}, \overline{y}]$ は $[\overline{x, y}] - (x, y)$ 　　$(\overleftarrow{x}, \vec{y}) = [\overline{x, y}] - [x, y]$

半直線の別の表し方として

x を通る一つの半直線を原線とし、これとなす偏角 θ（正負あり）を以て、x を通る任意の半直線を表し $H(\theta ; x)$ とかく。勿論 $H(\theta ; x)$ は半直線をさす。但し $H(\theta ; x)$ は x をも含むものとし、x を含まないときは $H(\theta ; \check{x})$ とする。又特に偏角を示す必要がないときは、$H(x)$, $H(\check{x})$ とする。

(ロ) $\mathfrak{Z}(M)$ について

M を定集合、X を任意の集合とするとき $X \cap M$（但し $\neq \varphi$ とす）が 連結（*connected*）である事を X が M に関して連結であるといい、$X \in \mathfrak{Z}(M)$ とかく。例として $X = [a, b]$, $H(\theta ; x)$ の場合を挙げておく。

example 1.

$a \neq b$ であるとき

$a, b \in M$ のとき $\begin{cases} [a, b] \in \mathfrak{Z}(M) \rightleftarrows [a, b] \subset M \\ [a, b] \bar{\in} \mathfrak{Z}(M) \rightleftarrows [a, b] \not\subset M \end{cases}$

$a \in M, b \in M'$ 　$\begin{cases} [a, b] \in \mathfrak{Z}(M) \rightleftarrows \forall y \in [a, b] \cap M, \ [a, y] \in \mathfrak{Z}(M) \\ [a, b] \bar{\in} \mathfrak{Z}(M) \rightleftarrows \exists y \in [a, b] \cap M, \ [a, y] \bar{\in} \mathfrak{Z}(M) \end{cases}$

$a = b$ のときも $a \in M$ であれば $[a, a] \in \mathfrak{Z}(M)$ と規約する。唯一点から成る集合も連結であるとする。従って $a \neq b$ 且つ $[a, b] \cap M$ が唯一点のときも $[a, b] \in \mathfrak{Z}(M)$

example 2.

$H(\theta ; x) \in \mathfrak{Z}(M) \rightleftarrows \forall y \in H(\theta ; x), \quad [x, y] \in \mathfrak{Z}(M)$

$H(\theta ; x) \bar{\in} \mathfrak{Z}(M) \rightleftarrows \exists y \in H(\theta ; x), \quad [x, y] \bar{\in} \mathfrak{Z}(M)$

（$\forall$, $\exists$ 等の論理記号については説明の必要はないと思う。）

(ハ) $\mathfrak{Z}_{x,y}(M)$ について

$\exists x, y \in X\cap M$ なるxとyが $X\cap M$に含まれる連続曲線（屈折線でもよい）で結ばれるとき $X\in \mathfrak{Z}_{x,y}(M)$ と記する。

(ニ) 論理記号についての一注意

次の二通りの記号は非常に意味が違います。

$\exists y : \forall x \quad \sim$

すべてのxについて〜であるようなyが存在する。

従ってyはxに *independent*

$\forall x ; \exists y : \sim$

xを任意にとると、それに応じて〜であるようなyが存在する。

従ってyはxに *depend* する。

其他の記号の規約については必要に応じ その都度説明する。

§2 本文の目的

*convex*の定義は "$\forall x, y \in M,\ [x,y]\subset M$" であるが、前半の$\forall$の一つを$\exists$で代えること、又は後半の$[x,y]$を "$[x.y]$ or $[\overleftarrow{x}.\overrightarrow{y}]$" で代えることによって二三の拡張が出来る。即ち

(1) $\exists x\in M : \forall y\in M, \quad [x.y]\subset M$

(2) $\forall x\in M, \forall y\in M. \quad [x,y]\subset M$ or $[\overleftarrow{x}.\overrightarrow{y}]\subset M$

(3) $\exists x\in M : \forall y\in M, \quad [x,y]\subset M$ or $[\overleftarrow{x},\overrightarrow{y}]\subset M$

(1)の場合Mを星型集合（*star set*）、(2)を準凸集合（*semi-convex set*）(3)を準星（*semi-star set*）ということにする。

然しもっと広く拡張して次の如く定義する。

(4) $\exists x\in\Omega : \forall y\in M, [x,y]\in\mathfrak{Z}(M)$ であるとき Mを扇型集合（*scalloped set*）と定義すると、*convex* は勿論、(1)(2)をも含み、更に(3)についてはその閉集合がこれになる事が言える。これらの集合の性質について調べた結果を報告したいと思う。尚この研究は出来るだけ初等的な方法を用いた事を注意しておく。

§3 一般的な星型集合

定義　点集合Mがあって、$\exists a\in M : \forall x\in M, [a:x]\subset M$ であるとき、Mを星型集合（*star set*）といい、aを星型集合の中心という。

このようなすべての $a\ (\in M)$ の集合をMの中心集合（*centric set*）といい、$C(M)$ で表す。

上の星型集合の定義は次の定義と同等である。

$\exists a \in M : \forall H(a) \in \mathfrak{Z}(M)$

尚明かな事であるが、Mが Convex $\rightleftarrows \left[\begin{array}{l} \text{Mが星型であって} \\ C(M) = M \end{array}\right]$

定理 1. 星型集合は連結である。

証. $\forall x, y \in M$ は $a \in C(M)$ を通る $[x, a] \vee [a, y]\ (\subset M)$ で結ばれる。

定理 2. Mを星型集合とするとき，$\forall x \in M'$; $\exists H(x) \subset M'$

証. もし $\exists x \in M' : \forall H(x) \not\subset M'$ とする。今 $a \in C(M)$ なる a を一つとり，$[\overrightarrow{a}, x] - (a, x) = H_0(x)$ とすると，$H_0(x) \not\subset M'$ だから $\exists y \in H_0(x) \cap M$. 従って $[a, y]$ が $x \in M'$ を含むことになり $a \in C(M)$ であることに矛盾する。

系 C を Jordan 閉曲線，C の囲む有限な領域を $\mathfrak{D}(C)$ とする。Mを星型とするとき，$C \subset M$ であれば $\mathfrak{D}(C) \subset M$

証 定理 2 より明らか。

次に $C(M)$ の重要な性質として，

定理 3. Mを星型集合とするとき，中心集合 $C(M)$ は convex である。

証 一点のみから成る集合も convex set と見なす事にすると，$C(M)$ が一点だけの時は本定理はすでに成立つから，$C(M)$ は一点以上あるものとする。$\forall a, b\ (\neq) \in C(M)$，$\forall c \in (a, b) \rightarrow c \in C(M)$ である事を証明すればよい。その為に $\forall a, b\ (\neq) \in C(M)$，$\exists c \in (a, b) : c \notin C(M)$ と仮定すると，$C(M)$ の定義から明に $\exists x \in M : (c, x) \not\subset M$ 従って $\exists y \in M' \cap (c, x)$. 然るに $[a, x]$, $[b, x]$ $[a, b]$ 何れも $\subset M$ であるから，a, b, x を結ぶ閉曲折線の内部に $y \in M'$ を含む事になり定理 2，系に矛盾。

尚簡単な事であるが次の定理も書添えておく。

$\exists\theta : 0 \leqq \theta \leqq 2\pi,\ H(\theta, x) \overline{\in} \mathfrak{Z}(M)$

且 $\exists\varphi(\neq\theta) : 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi,\ H(\varphi; x) \in \mathfrak{Z}(M)$

証： 前半は明かであるが、問題は むしろ後半である，仮りに $\exists x \in M - C(M)$: $\forall\theta : 0 \leqq \theta \leqq 2\pi,\ H(\theta; x) \overline{\in} \mathfrak{Z}(M)$ としよう。今 $\forall a \in C(M)$ をとると，$[\overrightarrow{a, x}] = [a, x] \cup H(\theta_0; x)$（但し $[\overrightarrow{a, x}] - [a, x]$ を $H(\theta_0; x)$ とおく） $H(\theta_0; x) \overline{\in} \mathfrak{Z}(M)$ なる故 $[\overrightarrow{a, x}] \overline{\in} \mathfrak{Z}(M)$ となり $a \in C(M)$ に反する．これで條件の必要な事が証せられたが．十分な事は明かである。

さて 星型Mに有界という條件を加えてみよう．

定理 5. Mが有界な 星型集合であるとき

$a (\in M)$ が $a \in C(M)$ である為の必要十分な條件は

$\forall x \in M',\ [a, x] \in \mathfrak{Z}(M)$ である。

証 必要なることの証明

若し $a \in C(M)$ に対し．$\exists x \in M' ; [a, x] \overline{\in} \mathfrak{Z}(M)$ とする。

§1.(ロ). ex.1 により $\exists y \in [a, x] \cap M : [a, y] \overline{\in} \mathfrak{Z}(M)$

これは $a \in C(M)$ に矛盾する。

十分なることの証明：

$\forall x \in M',\ [a, x] \in \mathfrak{Z}(M)$ なるaが若し $a \overline{\in} C(M)$ とする．

$\exists y \in M : [a, y] \overline{\in} \mathfrak{Z}(M)$ （此の場合 $[a, y] \overline{\in} \mathfrak{Z}(M)$ は $[a, y] \not\subset M$ と同じである）

だから，$\exists z \in M' \cap [a, y]$

一方 M の有界性により $\exists u \in M' \cap (\overrightarrow{a, y})$ 従って $[a, u] \overline{\in} \mathfrak{Z}(M)$ となり aの條件に矛盾する．

注意 ： 定理5 では有界という仮定が重要である。有界でない星集合では必ずしも成立しない。

定理 6. 有界集合Mが星型である為の必要十分な條件は

$\exists a \in M : \forall x \in M',\ [a, x] \in \mathfrak{Z}(M)$

注意 ： これも有界でないと．必ずしも成立しない．例えば、Nを有界凸集合とするとき．$\Omega - N$は 明かに星型でないが．すべての点が上の條件を満足してゐる。

星型集合に領域（*domain*）という条件を与える。尚この追加条件は *open set* という事だけを与えるのと同じである。それは定理1からすでに *connected* である事が保証されているから。星型閉集合を星型領域又は単に星領域（*star domain*）ということにする。

定理 7. 星型領域は *simply connected* である。

証　定理2. 系より明かである。

定理 8. Mを星型領域とすれば $M-C(M)$ は *open set*

証　$\forall x \in M-C(M)$; $\exists y \in M : [x,y] \not\subset M$. 従って

$\exists p \in [x,y] \cap M'$, 又 Mが *domain* により

$\exists \varepsilon > 0 : U(y;\varepsilon) \subset M$.　（$U(y;\varepsilon)$ は y の ε-近傍を表す）

x と p との距離を $dis(x,p)$ とすることにして

$0 < \forall \delta < \varepsilon \dfrac{dis(x,p)}{dis(p,y)}$,　$\forall z \in U(x;\delta)$, $(z,\vec{p}) \cap U(y;\varepsilon) \neq \phi$

又 $\forall u \in (z,\vec{p}) \cap U(y;\varepsilon)$, $[z,u] \not\subset M$　（pを含むから）

$z \bar{\in} M-C(M)$　　$\therefore U(x;\delta) \subset M-C(M)$

次に最も興味ある場合の一つとして有界星領域について調べる。

定理9. Mを有界星領域とするとき、

$a (\in M)$ が $a \in C(M)$ である為の必要十分な条件は

$\forall r \in M^*$, $[a,r] \in \mathfrak{z}(M^*)$ なることである。

証　必要なることの証

$a \in C(M)$ に対し $\exists r \in M^* : [a,r] \bar{\in} \mathfrak{z}(M^*)$ と仮定しよう。

然るとき $\exists t \in M^* \wedge (a,r)$ 且. $\exists x \bar{\in} M^* :$ $x \in (t,r)$.

従って $x \in M$ 又は $x \in M^\circ$

(i) $x \in M$ の場合

$\exists \varepsilon > 0 : U(x;\varepsilon) \subset M$.　一方 $t \in M^*$ により $0 < \forall \delta < \varepsilon \dfrac{dis(a,t)}{dis(a,x)}$.

$\exists y \in M' \wedge U(t;\delta)$,　而て $\forall z \in U(x;\varepsilon) \cap (a,\vec{y})$ $(\neq \phi)$

なる z をとると、$y \in [a,z]$　　$[a,z] \not\subset M$

故に $a \in C(M)$ と矛盾する。

(ii) $x \in M^\circ$ の場合

$\exists \varepsilon > 0 :$ $U(x;\varepsilon) \subset M'$.　一方 $0 < \forall \delta < \varepsilon \cdot \dfrac{dis(a,r)}{dis(a,x)}$,

$\forall u \in \overline{U}(r:\delta) \cap M$, $[a,u] \not\subset M$　(∵ $\overline{U}(x:\varepsilon)$ に通る)

∴ $a \in C(M)$ と矛盾

十分なることの証

$a \in M - C(M)$ なる a をとると、$\exists x \in M : [a,x] \not\subset M$　従って

$\exists y \in M' \cap (a,x)$　∴　$\exists t \in M^* \cap (y,x)$

一方 Mの有界性により $\exists z \in M' \cap (a,\bar{x})$　∴　$\exists s \in M^* \cap (x,z]$

$[a,s] \ni x \in M^*$　∴　$[a,s] \in \mathfrak{Z}(M^*)$

注意：有界でない星領域では必ずしも成立たない。

例：$M = \Omega - H(\lambda)$

有界であっても *open* でない星集合では必ずしも成立しない。

例：$M = \overline{U}(x;1) \cap \bigcup_n H\left(\frac{2n\pi}{\lambda};x\right)$

但し $\overline{U}(x;1)$ は x を中心とする単位円の内部、λ は一つの無理数、$\bigcup_n$ は すべての自然数 n についての *somme* をさす。

C(M)の具体的な構成について調べると、次の結果を得る。勿論有界星領域としてであるが、

定理10. Mを有界星領域とするとき

$$\Omega - C(M) = \bigcup_{\substack{r,s \in M^* \\ (r,s) < M}} [\overleftarrow{r}, \overrightarrow{s}],$$

ここに $\bigcup$ は $r, s \in M^*$ & $(r,s) < M$ であるすべての (r,s) についての *somme*.

証：定理8から容易に

$r, s \in M^*$;　$[\overleftarrow{r}, \overrightarrow{s}] \cap M$ の点は $C(M)$ の点でないから、

$[\overleftarrow{r}, \overrightarrow{s}] \cap M < M - C(M) < \Omega - C(M)$

又 明かに $[\overleftarrow{r}, \overrightarrow{s}] \cap M' < \Omega - C(M)$　従って $[\overleftarrow{r}, \overrightarrow{s}] < \Omega - C(M)$

∴　$\bigcup [\overleftarrow{r}, \overrightarrow{s}] < \Omega - C(M)$

逆に、$\forall x \in M - C(M)$;　$\exists y \in M$, & $\exists p \in M'$:　$p \in [x,y]$

従って (x,y) に含まれ、且 y に最も近い M^* の点 r がある（Mが *open* 従って y は内点だから このような $r (\neq y)$ は必ず存在する。）又 Mは有界により、$(x,\overrightarrow{y})$ に含まれ 且 y に最も近い M^* の点 $s (\neq y)$ がある。

$(r,s) < M$ なる故　$x \in [\overleftarrow{r}, \overrightarrow{s}]$，$r, s \in M^*$　　$M - C(M) \subset \bigcup [\overleftarrow{r}, \overrightarrow{s}]$

次に $z \in M'$ なる z についても 任意の $u \in M$ をとって上と同様に

$\exists r \in [z,u] \cap M^*$、& $\exists s \in (z,\overrightarrow{u}) \cap M^*$: $(r,s) < M$ &

$z \in [\overleftarrow{r}, \overrightarrow{s}]$

$$M \subset \bigcup\, [\overleftarrow{r}, \overrightarrow{s}]$$

従って $\Omega - C(M) = \{M - C(M)\} \cup M' \subset \bigcup\, [\overleftarrow{r}\ \overrightarrow{s}]$

依って 本定理は証明せられた.

系　有界領域 M が星型である為の必要十分なる條件は

$$\Omega - \bigcup_{\substack{r,s \in M \\ (r,s) \subset M}} [\overleftarrow{r}, \overrightarrow{s}] \neq \phi$$ であること.

§5. 二三の準備

星型領域を更に限定した場合の $C(M)^{c}$ の構造を考える為に その準備として 二三の事項を用意する.

(I) 単純領域 (*simple domain*)

定義　領域 D が次の條件を満足するとき、単純領域という。

(i) $D^{*} = D^{c*}$　(ii) $\forall r \in D^{*}\ \exists \varepsilon > 0 : U(r;\varepsilon) \in \mathfrak{Z}(D)\ \&\ \mathfrak{Z}(D^{c})$

D が単純領域であれば D^{c} も単純領域であり, $\overline{D}$ (D の *closure*) の任意の点 x の近傍 $U(x;\varepsilon) \in \mathfrak{Z}(D)$ である. ここでは単純領域の一般論は省略する.

(II) 角領域 (*angular domain*)

定義　$\bigcup_{\alpha<\theta<\beta} H(\theta;\check{x})$ を 点 x における. α から β 迄の角領域といい $A_x(\alpha,\beta)$ で表す. 但し $\bigcup_{\alpha<\theta<\beta}$ は $\alpha<\theta<\beta$ なる すべての θ についての *Summe*

$\bigcup_{\alpha\le\theta\le\beta} H(\theta;x)$ を点 x における. α から β 迄の閉角領域といい $A_x[\alpha,\beta]$ とする.

これらについて 次の如く規約する

(i) $A_x(\alpha,\beta) = A_x(\beta,\alpha)$,　$A_x[\alpha,\beta] = A_x[\beta,\alpha]$

(ii) $A_x(\alpha+2n\pi,\ \beta+2n\pi) = A_x(\alpha,\beta)$　$n=0,\pm1,\pm2,$
[　] に代えても成立つ.

(iii) $A_x[\alpha,\alpha] = H(\alpha;x)$　$A_x[0,\ 2\pi] = \Omega$

定義　$\alpha \leqq \beta$ とし $A_x(\alpha+2\pi,\beta)$ を $A_x(\alpha,\beta)$ の共軛角領域といい $A_x(\widetilde{\alpha,\beta})$ で表す. 同様に $A_x[\widetilde{\alpha,\beta}] = A_x[\alpha+2\pi,\beta]$ を $A_x[\alpha,\beta]$ の共軛閉角領域という.

Lemma.1. $x, y, z \in X$. $(y \neq z)$. $y, z \in A_x[\alpha.\beta] \subset A_x(\alpha.\gamma)$
且 $A_x(\alpha.\beta) \in \mathfrak{Z}_{y.z}(X) \to A_x(\alpha.\gamma) \in \mathfrak{Z}_{y.z}(X)$

Lemma 2. $y \in H(\alpha ; x) \cap X$. $z \in H(\beta : x) \cap X$.
$A_x(\alpha.\beta) \in \mathfrak{Z}_{y.z}(X)$ なるような $y.z$ があるとき
$\forall \gamma \in (\alpha.\beta)$, $\exists u \in H(\gamma ; x) \cap X$: $A_x(\alpha.\gamma) \in \mathfrak{Z}_{y.u}(X)$

注意 $\alpha > \beta$ であれば $\alpha > \gamma > \beta$，$\alpha < \beta$ であれば $\alpha < \gamma < \beta$ なる如き γ という意味を $\gamma \in (\alpha.\beta)$ と明記した．尚 $\gamma \in (\beta.\alpha)$ とかいてもよい．
$\gamma \in [\alpha.\beta]$ は $\alpha \leqq \gamma \leqq \beta$．又は $\alpha \geqq \gamma \geqq \beta$ の意味である．

注意 *Lemma* 1. は [ ] をすべて ( ) で代えても成立つ．

(II) 境界の接触線 切断線

Dを有界領域として D^* の接触線，切断線を定義する．

定義 $r \in D^*$ r を通る直線を L とする．

(1) $\exists \varepsilon > 0$: $U(r;\varepsilon) \cap D \cap L = \phi$ であるとき L を r における D^* の外触線
(2) $\exists \varepsilon > 0$: $U(r:\varepsilon) \cap D^c \cap L = \phi$ のとき L を r における D^* の内触線
(3) 特に L が r において外触線と同時に内触線であるとき．
L を r における D^* の全触線
(4) 上述の (1)(2) 何れかであるとき．L を r における D^* の接触線という．

定義 L が r において接触線でない時．即ち
$\forall \varepsilon > 0$, $U(r;\varepsilon) \cap D \cap L \neq \phi$ & $U(r.\varepsilon) \cap D^c \cap L \neq \phi$ であるとき．L を r における D^* の切断線という．

又 r における接触線が存在するとき，D^* は r において接触可能であるといい．r を接触点という．外触．内触．全触についても同様なことがいえる．

次に *example* として

Lemma.3. Xを有界領域，$\exists x \in X'$: $H(x) \subset X' \to x$ を含む X^* の外触線が存在する．

$H(x) \subset X'$ なる $H(x)$ を一つとって $H(x) = H(0 ; x)$ とおき．
$H(\alpha ; x) \cap X \neq \phi$ なる α を一つ定めることが出来る．然るとき
$A_x[0.\alpha]$ 内で x から X^* の外触線を引くことが出来ることを示すのであるが，ここでは すじみちだけにして．具体的な証明は 定理 11 に倣えばよい．
$A_x[0, \theta] \cap X = \phi$ （但し $\theta \in [0.\alpha]$）であるような （$\alpha > 0$ ならば）

θの least upper bound (若し $\alpha<0$ なれば greatest lower bound) と $\bar{\theta}$ (これの詳論は定理1.1の証に準ず) とすると、
$H(\bar{\theta}\,;x)$ には X' の点があり (定理1.1の証参照)、しかも $H(\bar{\theta}\,;x)$ は X の点がない

∵ 若し $H(\bar{\theta}\,;x)$ に X の点 y ありとすると、$\exists\varepsilon>0 : U(y;\varepsilon)\subset X$
今 $0<\delta<\sin^{-1}\dfrac{\varepsilon}{dis(x.y)}$ なる δ をとると $A_x[0,\bar{\theta}-\delta]\cap X \neq \phi$
これは $\bar{\theta}$ の l.u.b. (又は g.l.b.) に矛盾する。故に $H(\bar{\theta}\,;x)$ が外融線である。

§6. 単純星領域における $C(M)$ と接融線の関係

以下 星領域に単純領域の條件を追加して、$C(M)$ の構造と M^{*} の接融線との関連を調べるのが目的であるが、その前に、

Lemma 4. M を単純星領域とするとき
$x\in M-C(M)$ なる為の必要十分な條件は
$\exists y\in M : [x,y]\cap M^{\circ}\neq\phi$ なることである。

証 $C(M)$ の定義により $\exists z\in M : [x,z]\not\subset M \rightleftarrows \exists y\in M : [x,y]\cap M^{\circ}\neq\phi$
を証明すればよい。
$\exists z\in M : [x.z]\not\subset M$ を仮定すると、$\exists p\in(x,z)\cap M'$
然るに $M=M^{*}\cup M^{\circ}$ だから $p\in M^{*}$ としても差支えない。
($p\in M^{\circ}$ であれば すでに問題はない)
さて $z\in M \to \exists\varepsilon>0$. $U(z;\varepsilon)<M$. 一方 $0<\forall\delta<\dfrac{dis(x.p)}{dis(x,z)}\varepsilon$
なる δ をとると M が simple domain なる事より $\exists q\in U(p:\delta)\cap M^{\circ}$
x と q とを結ぶと $(x,\vec{q})\cap U(z;\varepsilon)\neq\phi$、そこで $y\in(x.\vec{q})\cap U(z;\varepsilon)$
なる y をとると、$[x.y]$ は M° の点 q を含む。逆の証明は容易である。

Lemma 5. M を星領域、$\forall x.y\,(\neq)\in M$ に対し、$\exists\alpha : -2\pi<\alpha<2\pi$
$A_x[0.\alpha]\in\mathfrak{Z}_{x.y}(M)$ 　但し $[\overrightarrow{x.y}]=H(0\,;x)$ とする。

証 $[x,y]\subset M$ なれば $\alpha=0$ として成立するから $x\in M-C(M)$
& $[x.y]\not\subset M$ と仮定する。即ち $H(0:x)\,\overline{\in}\,\mathfrak{Z}(M)$
然し 定理4により $\exists\alpha : 0<\alpha<2\pi$. $H(\alpha\,;x)\in\mathfrak{Z}(M)$
M の connectivity より $A_x[0,2\pi]\in\mathfrak{Z}_{x.y}(M)$ となり、*Lemma* 2 より $\exists z\in H(\alpha:x)\cap M : A_x[0.\alpha]\in\mathfrak{Z}_{y.z}(M)$ となり $[x,z]<M$ なる事と合せて $A_x[0,\alpha]\in\mathfrak{Z}_{x.y}(M)$

Lemma 6. M星領域; $x, y\ (\neq) \in M$, $[x, y] \not\subset M$ & $A_x[0, \alpha] \in \mathfrak{Z}_{xy}(M)$ ならば $A_x[\widetilde{0.\alpha}] \in \mathfrak{Z}_{xy}(M)$

証　若し $A_x[0.\alpha] \in \mathfrak{Z}_{x.y}(M)$ なると同時に $A_x[\widetilde{0.\alpha}] \in \mathfrak{Z}_{xy}(M)$ と仮定しよう. 然るとき 連続曲線 $C_1 < A_x[0\ \alpha]$　$C_2 < A_x[\widetilde{0\ \alpha}]$ が存在するから, $C_1 \cup C_2$ は *closed curve* となり しかも内部に M' の点がある. これは定理 2 系に矛盾.

愈々問題の本定理に入り.

定理 11.　M を有界単純星領域とするとき, $x \in M - C(M)$ であれば, x を含む M'' の外触線が存在して 且その時の外触点を a とすれば $(x\ a)$ が M° の点を含むようにすることが出来る.

証　$x \in M - C(M) \rightarrow \exists y\ (\neq x) \in M : [x, y] \not\subset M$

$[\overrightarrow{x, y}] = H(0; x)$ とすると *Lemma* 5 により $\exists \omega : 0 < |\omega| < 2\pi$

$H(\omega; x) \in \mathfrak{Z}(M)$ & $A_x[0, \omega] \in \mathfrak{Z}_{x.y}(M)$ 故 *Lemma* 6 により

$A_x[\widetilde{0.\omega}] = A_x[0, \omega \pm 2\pi] \overline{\in} \mathfrak{Z}_{x.y}(M)$

注意　$\omega \pm 2\pi$ の符号の意味は次の通りである.

$\omega > 0$ のときは $-$, $\omega < 0$ のときは $+$ をとる. 以下煩雑を避ける為に $\omega < 0$ 従って $0 < \omega + 2\pi$ の場合のみを論ずる.

$\omega > 0$ のときも証明のすぢみちは変らない.

(i) $0 \leqq \theta \leqq \omega + 2\pi$ において $\exists z \in H(\theta; x) \cap M : A_x[0.\theta] \in \mathfrak{Z}_{yz}(M)$ であるような θ の *l.u.b.* が存在する. それを γ とする.

(*Lemma* 3 の証明の中にも同じことが出て来た. その時は詳述を省いたが, ここで少し説明を加えておく. 前の *Lemma* 3 の中も同様の証明で出来る)

$0 \leqq \theta \leqq \omega + 2\pi$ の θ を次の $\mathfrak{A}$ と $\mathfrak{B}$ とに分類する.

$\mathfrak{A}$: $\exists z \in H(\theta; x) \cap M : A_x[0 : \theta] \in \mathfrak{Z}_{y.z}(M)$　なる θ の類

$\mathfrak{B}$: $\forall z \in H(\theta; x) \cap M : A_x[0. \theta] \overline{\in} \mathfrak{Z}_{yz}(M)$　なる θ の類

(イ) $0 \in \mathfrak{A}$, $\omega + 2\pi \in \mathfrak{B}$ だから $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ 共に空でない.

(ロ) *Lemma* 1, 2 により $\forall \alpha \in \mathfrak{A}$, $\forall \beta \in \mathfrak{B} \rightarrow \alpha < \beta$

Schnitt により $[\mathfrak{A} | \mathfrak{B}] = \gamma$ を定める

(ii) $H(\gamma; x)$ には少くとも一つ M の *Haufungspunkt* がある.

(*Lemma* 3 の証明も これと同様である)

$0 \leqq \varepsilon \leqq \gamma$ なる ε を任意にとると、$H(\gamma-\frac{\varepsilon}{2^n};\check{x})$ $(n=1,2,\cdots)$ には各 n に対し一つづつ次のような a_n $(n=1,2,\cdots\cdots)$ をとることが出来る。

$$a_n \in H(\gamma-\tfrac{\varepsilon}{2^n};\check{x}) \cap M, \ \& \ \ A_x[0,\gamma-\tfrac{\varepsilon}{2^n}] \in \mathfrak{Z}_{y,a_n}(M)$$

注意：$\frac{\varepsilon}{2^n}$ の形は *essential* なものでない。$n \to \infty$ と共に $\to 0$ になりさえすればよい。

以上のすべての集合 $\{a_n\}$ は有界である（∵ M が有界）から少くとも一つ *Häufungspunkt* がある。この一つを a とすれば、$a \in H(\gamma;\acute{x})$ なることは明かである

(iii) $\exists \delta > 0$: $H(\gamma;x) \cap U(a;\delta)$ には M の（内）点がない。

a が外点でないことは明かであるから、境界点であることを証明する為には、a が M の点でないことを証明せねばならぬが、更に進めて $U(a;\delta) \cap H(\gamma;x)$ には M の点がないような近傍 $U(a;\delta)$ の存在を証明すれば十分である。

さて M は *simple domain* であるから、

$\forall m \in \overline{M}$, $\exists \delta > 0$: $U(m;\delta) \in \mathfrak{Z}(M)$、（$\overline{M}$ は *closure*）

今 $a \in \overline{M} \to \exists \delta > 0$: $U(a;\delta) \in \mathfrak{Z}(M)$ なる δ を定めるとき $U(a;\delta) \cap H(\gamma;x)$ には M の点がない事が言える。

∵ 若し $\exists b \in U(a;\delta) \cap H(\gamma;x) \cap M$ とすると、

$0 < \exists \eta < \delta - dis(a,b)$: $U(b;\eta) < M$ だから

$u \in A_x(\delta, \omega+2\pi) \cap U(b;\eta) \cap M$ なる u を一つとっておく。

又一方 $U(a;\delta)$ 内にある前述の $\{a_n\}$ の内の一つを a_k とすると、$U(a;\delta) \in \mathfrak{Z}_{a_k,u}(M)$ 又明に $A_x[0,\gamma] \in \mathfrak{Z}_{y,a_k}(M)$ である故、今 $u \in H(\gamma+\zeta;x)$、$0 < \zeta < \omega+2\pi-\gamma$ とすると、$A_x[0,\gamma+\zeta] \in \mathfrak{Z}_{y,u}(M)$ となる。これは γ が *l.u.b.* なる事に矛盾する。

以上で $H(\gamma;x)$ が a における M^* の外接線であることの証明が完了したが (x,a) に M^0 の点がある事を証せねばならぬ。

(iv) (x,a) に M^0 の点があること。

$H(\gamma;x)$ に於て x に最も近い M^* の点を b とする。勿論 $a \neq b$ で

あることが言われる．（∵ $(x, s) \cap$（sの Umgebung）にMの点がある）

(s, a) に M°の 点があることを示そう

若し $[s. a] \subset \overline{M}$ と仮定する．$[s, a]$ のすべての点 v に $U(v; \varepsilon_v)$,

$0 < \varepsilon_v < dis(x. v) \sin \gamma$ を対応させると，$[s. a]$ が有界 closed

により $\{U(v; \varepsilon_v)\}$ の中の有限個で $[s, a] \subset \bigcup_{i=1}^{\nu} U(v_i; \varepsilon_{v_i})$,

但し $s \in U(v_1; \varepsilon_{v_1})$, $a \in U(v_\nu; \varepsilon_{v_\nu})$

今 $p_i \in U(v_i; \varepsilon_{v_i}) \cap U(v_{i+1}; \varepsilon_{v_{i+1}}) \cap M$, $i = 1, 2, \cdots \nu-1$

$p_\nu \in U(v_\nu; \varepsilon_{v_\nu}) \cap \{a_n\}$, $p_0 \in U(v_1; \varepsilon_{v_1}) \cap (x, s)$

なる $p_0, p_1, \cdots\cdots, p_\nu$ をとると，M が simple domain

なる故．$U(v_i; \varepsilon_{v_i}) \in \mathfrak{Z}_{p_{i-1}, p_i}(M)$．$(i = 1, 2, \cdots\cdots, \nu)$．

又 $A_x[0. \gamma] \in \mathfrak{Z}_{y. p_\nu}(M)$ 及び $[x. p_0] \subset M$．

従って $A_x[\widetilde{0. \omega}] \in \mathfrak{Z}_{x. y}(M)$．

$\left(\bigcup_{i=1}^{\nu} U(v_i; \varepsilon_{v_i}) \subset A_x(0, \omega + 2\pi)\right.$ だから p_ν と x が $A_x(0, \omega + 2\pi)$ 内

で結ばれる）．此は Lemma 6 に矛盾する．

(x, a) には必ず M°の点がある。これで本定理の証明は完了するが，

逆として

定理12．Mを有界星型．単純領域とするとき．$x (\in M)$ を含んで $(x. a) \cap M^\circ \neq \phi$

なるような M^* の外触線．$[\overrightarrow{x, a}]$ が存在するならば，$x \overline{\in} C(M)$

但し aは 外触点

証 $p \in (x. a) \cap M^\circ \to \exists \eta > 0 : U(p : \eta) \subset M^\circ$

$0 < \varepsilon < \dfrac{dis(x. a)}{dis(x. p)} \eta$ なるように εをとると $\exists y \in U(a; \varepsilon) \cap M$

として $[x. y] \cap U(p : \eta) \neq \phi$ $\therefore [x. y] \not\subset M$ $\therefore x \overline{\in} C(M)$

定理13．Mを有界単純星領域とし．$x \in M - C(M)$ なれば xを含む M^*の

内触線が存在し．且 内触点を a とすると，$(\overrightarrow{x, a})$ が Mの点

を含むようにする事が出来る．

証 Lemma 4により $\exists y \in M : [x. y] \cap M^\circ \neq \phi$，$[\overrightarrow{x. y}] = H(0 : x)$

とする．又 定理4．により $\exists \omega : H(\omega : x) \in \mathfrak{Z}(M)$（便宜上

$\omega > 0$ とする）Lemma 5 より $A_x[0. \omega] \in \mathfrak{Z}_{x. y}(M)$．

この$x. y$ を結ぶ屈折線を $C (\subset M)$ とし．$C \vee [x. y]$（閉屈折線）の

内部にある M°の部分集合を N とすれば、Nは有限であり、$H(\omega;x)\subset N'$
故に *Lemma* 3 により、xを含む Nの外触線 が存在し これがその
まゝ、Mの内触線になることが言われる。
$(x,\overrightarrow{\alpha})$ が Mの点を含むことも、定11.の証明の(iV)と同様の方法で
証明されるが、ここでは省略する。

定理14. M有界 単純星領域 $x(\in M)$を含み、$(x,\overrightarrow{x})\cap M\neq\phi$、なる
ような M^{*}の内触線が存在するならば $x\in C(M)$.
但し αは内触点。
(証) 定理12と同じ方法で証明される。

定理15. $x\in C(M)^{i}$ ($C(M)$の内点の集合)ならば xを含む M^{*}の接触線
は存在しない。 但し Mは有界、単純星領域。

証 (i) $\forall x\in C(M)^{i}$, $\forall r\in M^{*}\rightarrow[x,r]\subset M$ を証明する。
若し $[x,r]$ に M'の点 p がありとせよ。
$x\in C(M)^{i}\rightarrow\exists\delta>0 : \overline{U}(x;\delta)\subset C(M)$
一方 $0<\varepsilon<\dfrac{dis(p,r)}{dis(x,r)}\delta$ なる ε を一つとると、
$\overline{U}(p;\varepsilon)\cap M^{\circ}\neq\phi$ ($\because$ Mの単純性より $M'=M^{*}\cup M^{\circ}=M^{\circ*}\cup M^{\circ}$
故に $p\in M^{\circ*}\cup M^{\circ}$ だから。)
$q\in\overline{U}(p;\varepsilon)\cap M^{\circ}$ とすれば $(r,\overrightarrow{q})\cap\overline{U}(x,\delta)\neq\phi$ これの
含む点を Sとすれば $S\in C(M)$ 即ち $q\in(S,r)$
然るに $q\in M^{\circ}$ だから (S,q)に M^{*}の点がある。これは定理9.に
反する。

(ii) $(x,\overrightarrow{r})\subset M^{\circ}$ を証明する
若し $(x,\overrightarrow{r})$に $\overline{M}$の点 k があるとすると、$0<\varepsilon<\dfrac{dis(k,r)}{dis(x,r)}\delta$
$\overline{U}(k;\varepsilon)$に M の点 f をとれば、Mの有界性より $(r,\overrightarrow{f})$に M^{*}
の点があり、又 $(f,\overrightarrow{r})\cap\overline{U}(x;\delta)\neq\phi$ となり、(i)の結論
と同様になる。

定理16. M 有界星領域とすると、M'の任意の点を含む M^{*}の外触線
が存在する。

証 *Lemma* 3. (定理11の証明方法に倣って証明される)と定理2.
により明かである。

定理11より定理16迄を綜合すると次の事がいはれる。

定理17. $r \in M^*$. rを外触点とする外触線を$L(r)$ $T = \cup L(r)$

($\cup$は外触可能な$r \in M^*$すべてに亘る)

とすれば. $\Omega - T \subset C(M)$; $C(M)^i \subset \Omega - T$

定理17.は"外触"を単に"接触"で置換えても成立する。勿論定理17.のMは有界閉凸星領域である。

当然結論されることであるが$C(M) - C(M)^i$の点を通ってM^*の接触線が引けるかどうかは一概に言えない。しかし若し$C(M) - C(M)^i$の点xから接触線が引ける場合は、全触線が引かれて(x, r)に外点がなく、且$(x, \vec{r})$に内点がないように出来る。(rは全触点である)

例えばMを、到る処 *glatt* な *closed curve* に包囲された星領域とすれば、Tはすべての切線におはわれる部分である。但し交曲点における切線を除く。

附記。以上つまらぬ事が冗長に過ぎた事を御詫びします。

参考文献 *Hausdorff* *Mengenlehre*

辻正次 集合論