Totally geodesic surfaces in Riemannian symmetric spaces and nilpotent orbits

奥田隆幸 (広島大)

久保亮氏 (広島修道大), 間下克哉氏 (法政大),
田丸博士氏 (広島大) との共同研究.

2015/11/27 第 42 回変換群論シンポジウム
於 金沢勤労者プラザ

主結果まとめ

- G : **連結**非コンパクト実線型半単純リー群.
- $\mathfrak{g} := \mathrm{Lie}\, G$.
- $M := G/K$: 非コンパクト型リーマン対称空間.

Theorem 1.1 (主結果).

$\{$ 非平坦全測地的曲面 *in* $M\}/G$
$\overset{1:1}{\longleftrightarrow}$ $\{$ 零軌道でない冪零随伴軌道 *in* $\mathfrak{g}\}/\{\pm 1\}$

- 実半単純リー環内の冪零随伴軌道は Djocovic (80's) らにより分類が知られている (cf. Collingwood–McGovern's book).

主結果まとめ

Theorem 1.2 (主結果).

$$\{\text{ 非平坦全測地的曲面 } \textit{in } M = G/K\}/G \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \{\text{ 零軌道でない冪零随伴軌道 } \textit{in } \mathfrak{g}\}/\{\pm 1\}$$

- 実半単純リー環内の冪零随伴軌道は Djocovic (80's) らにより分類が知られている (cf. Collingwood–McGovern's book).

群作用との関係について:

Fact 1 (Jacobson–Morozov, Kostant).

$$\{\text{ 冪零随伴軌道 } \textit{in } \mathfrak{g}\} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \mathrm{Hom}(SL(2,\mathbb{R}), G)/G.$$

内容

先行研究など

- G : 非コンパクト実半単純リー群
(連結性はいったん仮定しない).
- $M = G/K$: 非コンパクト型リーマン対称空間.

Definition 2.1.

部分多様体 $S \subset M$ が **全測地的**
$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ S は完備で第二基本形式が恒等的に零
(測地線が “はみ出さない”).

問

M 内の全測地的部分多様体を分類せよ！

Rem: $M = G/K$ 上の極作用の section は全測地的部分多様体.

問: 非コンパクト型リーマン対称空間 $M = G/K$ 内の全測地的部分多様体を分類せよ！

Fact 2.2.

$M' = U/K$ を $M = G/K$ のコンパクト双対とすると,

- { M' 内の全測地的部分多様体 }$/U$
- { M 内の全測地的部分多様体 }$/G$

は一対一に対応する.

典型例

- $M' = O(p+q)/(O(p) \times O(q))$: 実グラスマン多様体
- $M = O(p,q)/(O(p) \times O(q))$: その非コンパクト双対

M の方がトポロジーが簡単 ($M \simeq \mathbb{R}^N$ as manifolds).

- $M = G/K$: 非コンパクト型リーマン対称空間.

全測地的部分多様体 $S \subset M$ の分類についての先行研究

1. S が平坦 : 極大平坦全測地的部分多様体は一意的.
2. S が非平坦極大, $\mathrm{rank}\, M = 1$: Wolf (1963).
3. 〃, $\mathrm{rank}\, M = 2$: Chen–長野 (1978), Klein (2010).
4. $\mathrm{rank}\, S = \mathrm{rank}\, M = \mathrm{rank}\, G$: 井川–田崎 (2000).
5. S が非平坦曲面 $(\dim S = 2)$:
    - M が AI 型: 藤丸–久保–田丸 (2014).
    - M が古典型: 間下 (2014).
    - 全て (ただし G は連結): 今回 (論文準備中).

Fact 2.3.

*M 内の非平坦全測地的**部分多様体**は少なくとも一つの非平坦全測地的**曲面**を含む.*

- AI 型リーマン対称空間の極大全測地的部分多様体の分類の研究 : 木村–久保–奥田–田丸 (論文準備中)

- $M = G/K$: 非コンパクト型リーマン対称空間.
- $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$: 対応する Cartan 分解.
- $\theta \curvearrowright \mathfrak{g}$: 対応する Cartan 対合.

Fact 2.4.

1. $\mathfrak{l} \subset \mathfrak{g}$ を *θ-stable* な部分リー環とし, $\mathfrak{p}_{\mathfrak{l}} = \mathfrak{l} \cap \mathfrak{p}$ とおく. このとき $S := \exp \mathfrak{p}_{\mathfrak{l}} \subset M$ は全測地的部分多様体となる.
2. M の任意の全測地的部分多様体は上記の形で構成できる.
3. 次の三つの集合は一対一に対応する:
   - { コンパクト因子を持たない *θ-stable* 部分リー環 *of* $\mathfrak{g}$ }$/K$.
   - { *Lie triple systems in* $\mathfrak{p}$ }$/K$.
   - { 全測地的部分多様体 *in* M }$/G$.
4. 平坦全測地的部分多様体は可換部分リー環と対応する.

特に $M = G/K$ の全測地的部分多様体は等質部分多様体となる.

- $M = G/K$: 非コンパクト型リーマン対称空間.

Fact 2.5.

次の三つの集合は一対一に対応する:

- { 非平坦全測地的 **曲面** *in* $M\}/G$.
- $\{\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ と同型な θ-*stable* 部分リー環 *of* $\mathfrak{g}\}/K$.
- $\{\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ と同型な部分リー環 *of* $\mathfrak{g}\}/G$.

Example 2.6.

$M = SL_3(\mathbb{R})/SO(3)$ の場合 $(\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3(\mathbb{R}), \theta(X) = -{}^tX)$

1. $\mathfrak{l} = \left\{\begin{pmatrix} \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\} \subset \mathfrak{sl}_3(\mathbb{R})$.
2. $\mathfrak{l} = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 0 & \\ & & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & & \\ 2 & 0 & \\ & 2 & 0 \end{pmatrix}\right\}$.

冪零軌道

- G : **連結**非コンパクト実半単純リー群.
- $M = G/K$: 非コンパクト型リーマン対称空間.

Theorem 3.1 (主結果 (再掲)).

$$\{\text{非平坦全測地的曲面 } \textit{in } M\}/G \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \{\text{零軌道でない冪零随伴軌道 } \textit{in } \mathfrak{g}\}/\{\pm 1\}$$

Definition 3.2.

- $X \in \mathfrak{g}$ が**冪零 (nilpotent)** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\mathrm{ad}\, X \in \mathrm{End}(\mathfrak{g})$ が冪零.
- 冪零元からなる $\mathrm{Int}\, \mathfrak{g}$ 軌道を**冪零随伴軌道**とよぶ.

Example 3.3.

$\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}_N(\mathbb{R}) = M_N(\mathbb{R})$ のとき,
$X \in \mathfrak{g}$ が冪零 $\iff$ 行列 X が冪零.

Example 3.4.

$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3(\mathbb{R})$ の場合の零軌道以外の冪零随伴軌道:

- $\mathcal{O}_{[2,1]} = \mathrm{Ad}(SL_3(\mathbb{R})) \begin{pmatrix} J_0(2) & \\ & J_0(1) \end{pmatrix} \subset \mathfrak{sl}_3(\mathbb{R})$.
- $\mathcal{O}_{[3]} = \mathrm{Ad}(SL_3(\mathbb{R})) \cdot J_0(3) \subset \mathfrak{sl}_3(\mathbb{R})$.

(ただし $J_\lambda(n)$ は固有値 λ, サイズ n のジョルダン細胞)
一般に

$$\{ \text{冪零随伴軌道 in } \mathfrak{sl}_{2k+1}(\mathbb{R}) \} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \{ 2k+1 \text{ の分割} \}.$$

($\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{2k}(\mathbb{R})$ の場合は少し複雑).

Theorem 3.5 (主結果 (再掲)).

$\{$ 非平坦全測地的曲面 *in* $M\}/G$

$\xleftrightarrow{1:1}$ $\{$ 零軌道でない冪零随伴軌道 *in* $\mathfrak{g}\}/\{\pm 1\}$

Definition 3.6 (再掲).

- $X \in \mathfrak{g}$ が**冪零 (nilpotent)** $\overset{\text{def}}{\longleftrightarrow}$ $\operatorname{ad} X \in \operatorname{End}(\mathfrak{g})$ が冪零.
- 冪零元からなる $\operatorname{Int}\mathfrak{g}$ 軌道を**冪零随伴軌道**とよぶ.

Fact 3.7.

$\mathcal{O}$ が冪零随伴軌道

$\Rightarrow -\mathcal{O} := \{-X \mid X \in \mathcal{O}\}$ も冪零随伴軌道.

Rem: 冪零軌道は G のある種の無限次元表現 (既約認容表現) の "大きさ (Gelfand–Kirillov 次元)" を測るために用いられる.

Theorem 3.8 (主結果 (再掲)).

$$\{\text{ 非平坦全測地的曲面 } \textit{in } M\}/G \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \{\text{ 零軌道でない冪零随伴軌道 } \textit{in } \mathfrak{g}\}/\{\pm 1\}$$

Example 3.9.

$M = G/K = SL_{2k+1}(\mathbb{R})/SO(2k+1)$ の場合:
任意の $\mathfrak{sl}_{2k+1}(\mathbb{R})$ 内の冪零随伴軌道について $\mathcal{O} = -\mathcal{O}$. 特に

$$\begin{aligned}
&\{\text{ 非平坦全測地的曲面 in } M\}/G \\
&\overset{1:1}{\longleftrightarrow} \{\text{ 零軌道でない冪零随伴軌道 in } \mathfrak{g}\}/\{\pm 1\} \\
&\overset{1:1}{\longleftrightarrow} \{\ 2k+1 \text{ の分割 }\} \setminus \{[1^{2k+1}]\}.
\end{aligned}$$

Example 3.10.

$M = G/K = SL_4(\mathbb{R})/SO(4)$ の場合:

$$\{\text{冪零随伴軌道 in } \mathfrak{sl}_4(\mathbb{R})\}$$
$$\overset{1:1}{\longleftrightarrow} \{\ [4]_{\mathsf{I}}, [4]_{\mathsf{II}}, [3,1], [2^2]_{\mathsf{I}}, [2^2]_{\mathsf{II}}, [2,1^2], [1^4]\ \}.$$

また任意の $\mathfrak{sl}_4(\mathbb{R})$ 内の冪零随伴軌道について $\mathcal{O} = -\mathcal{O}$. 特に

$$\{\ \text{非平坦全測地的曲面 in } M\}/G$$
$$\overset{1:1}{\longleftrightarrow} \{\ \text{零軌道でない冪零随伴軌道 in } \mathfrak{g}\}/\{\pm 1\}$$
$$\overset{1:1}{\longleftrightarrow} \{\ [4]_{\mathsf{I}}, [4]_{\mathsf{II}}, [3,1], [2^2]_{\mathsf{I}}, [2^2]_{\mathsf{II}}, [2,1^2]\ \}.$$

Rem: 藤丸–久保–田丸 (2015) では $M = GL_4^{\pm 1}(\mathbb{R})/O(4)$ の場合 (G が非連結) の全測地的曲面を分類 (後で紹介).

Example 3.11.

$M = G/K = SL_6(\mathbb{R})/SO(6)$ の場合:

$$\{\text{冪零随伴軌道 in } \mathfrak{sl}_6(\mathbb{R})\}$$
$$\overset{1:1}{\longleftrightarrow} \{\ [6]_{\mathrm{I}}, [6]_{\mathrm{II}}, [5,1], [4,2]_{\mathrm{I}}, [4,2]_{\mathrm{II}}, [4,1^2], [3^2], \ldots [2,1^4], [1^6]\ \}.$$

この場合 $\mathcal{O}_{[\text{even partition}]_{\mathrm{I}}} = -\mathcal{O}_{[\text{even partition}]_{\mathrm{II}}}$. 特に

$$\{\text{ 非平坦全測地的曲面 in } M\}/G$$
$$\overset{1:1}{\longleftrightarrow} \{\text{ 零軌道でない冪零随伴軌道 in } \mathfrak{g}\}/\{\pm 1\}$$
$$\overset{1:1}{\longleftrightarrow} \{\ [6], [5,1], [4,2], [4,1^2], [3^2], \ldots, [2,1^4]\ \}.$$

ややこしさを表す計算:

- $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{SL_3(\mathbb{R})}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{SL_3(\mathbb{R})}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- $\mathrm{diag}(J_0(2), J_0(2)) \overset{SL_4(\mathbb{R})}{\not\sim} \mathrm{diag}(J_0(2), -J_0(2))$.
  $\mathrm{diag}(J_0(2), J_0(2)) \overset{SL_4(\mathbb{R})}{\not\sim} \mathrm{diag}(-J_0(2), J_0(2))$.

- $\mathrm{diag}(J_0(2), J_0(2), J_0(2)) \overset{SL_6(\mathbb{R})}{\not\sim} \mathrm{diag}(J_0(2), J_0(2), -J_0(2))$.
  $\mathrm{diag}(J_0(2), J_0(2), J_0(2)) \overset{SL_6(\mathbb{R})}{\sim} \mathrm{diag}(-J_0(2), -J_0(2), J_0(2))$.

Theorem 3.12 (主結果 (再掲)).

$\{$ 非平坦全測地的曲面 *in* $M\}/G$

$\overset{1:1}{\longleftrightarrow}$ $\{$ 零軌道でない冪零随伴軌道 *in* $\mathfrak{g}\}/\{\pm 1\}$

Example 3.13.

$\mathfrak{g} = \mathfrak{e}_{6(2)}$ の場合:

$\sharp\{$ 零軌道でない冪零随伴軌道 in $\mathfrak{g}\} = 37$

$\sharp\{$ 零軌道でない冪零随伴軌道 in $\mathfrak{g}\}/\{\pm 1\} = 33$

主結果の証明

- $\{$ 非平坦全測地的曲面 in $M\}/G$

$\updownarrow$ Lie triple system の話 (cf. Helgason's book) + 簡単な考察

- $\{\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ と同型な部分リー環 of $\mathfrak{g}\}/G$

$\updownarrow$ 簡単な考察

- $\mathrm{Out}(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}))\backslash(\mathrm{Hom}_{\mathsf{inj}}(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}), \mathfrak{g})/G)$

$\updownarrow$ Jacobson–Morozov, Kostant + 簡単な計算

- $\{\pm 1\}\backslash\{$ 零軌道でない冪零随伴軌道 in $\mathfrak{g}\}$

完全不変量 (cf. Djokovic's work in 80's)

- $M = G/K$: 非コンパクト型リーマン対称空間 (G は連結).
- θ : Cartan involution on $\mathfrak{g}$.
- $\theta' : \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) \to \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}), X \mapsto -{}^tX$ (Cartan involution on $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$).

Theorem 4.1.

以下の集合は一対一に対応する:

- { 向き付けられた非平坦全測地的曲面 *in* M }$/G$.
- $\{ \rho \in \mathrm{Hom}_{inj}(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}), \mathfrak{g}) \mid \rho \circ \theta' = \theta \circ \rho \}/K$.
- { 零でない冪零随伴軌道 *in* $\mathfrak{g}$ }.

$$\{\text{ 向き付けられた非平坦全測地的曲面 in } M\ \}/G \xleftrightarrow{1:1}$$
$$\{\ \rho \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{inj}}(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}), \mathfrak{g}) \mid \rho \circ \theta' = \theta \circ \rho\}/K$$

- $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$: Cartan 分解 w.r.t. θ.

Fact 4.2 (cf. Chapter 9 of Collingwood–McGovern's book).

次の写像は単射:

$$\varphi : \{\ \rho \in \mathrm{Hom}_{inj}(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}), \mathfrak{g}) \mid \rho \circ \theta' = \theta \circ \rho\}/K \hookrightarrow \{K\text{-orbits in } \mathfrak{k}\},$$
$$[\rho] \mapsto \mathrm{Ad}(K) \cdot \rho(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}).$$

この K-軌道は向き付けられた全測地的曲面の G-共役類について完全不変量となる (分類にはこれを用いる).
課題: この K-軌道の幾何学的な意味は？

G が非連結の場合の分類について

- G : (連結とは限らない) 非コンパクト実半単純リー群.
- $M = G/K$: 非コンパクト型リーマン対称空間
(特に $G = \mathrm{Isom}(M) \iff G = \mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$ の場合に興味がある).

Theorem 5.1 (主結果の一般化).

$$\{\text{非平坦全測地的曲面 } \textit{in } M\}/G \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \{\text{零軌道でない冪零 } G\text{-軌道 } \textit{in } \mathfrak{g}\}/\{\pm 1\}$$

Rem: 半単純リー環 $\mathfrak{g}$ 内の冪零 $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$-軌道の分類はおそらく完全には知られていない.

Example 5.2 (再掲).

$M = G/K = SL_4(\mathbb{R})/SO(4)$ の場合:

$$\{\text{非平坦全測地的曲面 in } M\}/G$$
$$\xleftrightarrow{1:1} \{\text{零軌道でない冪零随伴軌道 in } \mathfrak{g}\}/\{\pm 1\}$$
$$\xleftrightarrow{1:1} \{\ [4]_{\mathsf{I}}, [4]_{\mathsf{II}}, [3,1], [2^2]_{\mathsf{I}}, [2^2]_{\mathsf{II}}, [2,1^2]\ \}.$$

Example 5.3.

$M = G'/K' = GL_4^{\pm 1}(\mathbb{R})/O(4)$ の場合 (藤丸–久保–田丸 (2015)):

$$\{\text{非平坦全測地的曲面 in } M\}/G'$$
$$\xleftrightarrow{1:1} \{\text{零軌道でない冪零 } G'\text{-軌道 in } \mathfrak{g}\}/\{\pm 1\}$$
$$\xleftrightarrow{1:1} \{\ [4], [3,1], [2^2], [2,1^2]\ \}.$$

簡単なケース

- $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$: Cartan 分解.

Theorem 5.4.

複素簡約リー環 $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$ が外部自己同型を持たない, つまり半単純 (中心がない) かつ各因子が無重複で A, D, E_6 型の因子を持たないとき, 冪零 $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$-軌道は随伴軌道 ($\iff$ 連結) となる.

Corollary 5.5.

$M = SL_{2k+1}(\mathbb{R})/SO(2k+1)$, $\mathrm{Isom}(M) \supsetneq SL_{2k+1}(\mathbb{R})$ について:

$$\begin{aligned}
&\{\text{非平坦全測地的曲面 } \textit{in } M\}/\,\mathrm{Isom}(M)\\
&\overset{1:1}{\longleftrightarrow} \{\text{ 冪零 } \mathrm{Aut}(\mathfrak{sl}_{2k+1}(\mathbb{R}))\text{-軌道 } \textit{in } \mathfrak{sl}_{2k+1}(\mathbb{R})\}/\{\pm 1\}\\
&= \{\text{ 冪零随伴軌道 } \textit{in } \mathfrak{sl}_{2k+1}(\mathbb{R})\}/\{\pm 1\}\\
&\overset{1:1}{\longleftrightarrow} \{\ 2k+1 \text{ の分割 }\} \setminus \{[1^{2k+1}]\}.
\end{aligned}$$