和音のトポロジーについての解説の補足と発展

（ホモロジー群を勉強した (あるいは勉強中の) 人向け）

中身のつまった３角形と４面体はそれぞれ２単体、３単体と呼ばれるものでした。そして、ホモロジー群を定義するときにはこれらに向きを考えました。n 単体 $\langle a_0 a_1 \ldots a_n \rangle$ に対して ($a_0, \ldots, a_n$ が単体の頂点)、その頂点を入れ替えてできる単体 $\langle a_{i_0} a_{i_1} \ldots a_{i_n} \rangle$ は置換

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & n \\ i_0 & i_1 & \ldots & i_n \end{pmatrix}$$

を考えて、これが偶置換なら同じ向きで $\langle a_{i_0} a_{i_1} \ldots a_{i_n} \rangle = \langle a_0 a_1 \ldots a_n \rangle$、奇置換なら逆向きで $\langle a_{i_0} a_{i_1} \ldots a_{i_n} \rangle = -\langle a_0 a_1 \ldots a_n \rangle$ と表しました。

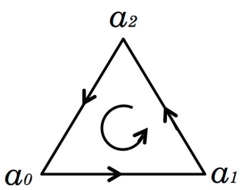
ホモロジー群を定義するときには、次に単体複体から n 次元鎖群を定義して境界作用素を定義するわけですが、この境界作用素がどのようなものか、図形的に考えてみましょう。

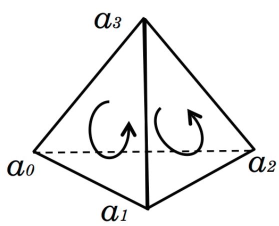
n 単体 $\langle a_0 a_1 \ldots a_n \rangle$ に対して、境界作用素は

$$\partial(\langle a_0 a_1 \ldots a_n \rangle) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \langle a_0 \ldots \hat{a}_i \ldots a_n \rangle$$

で定義しました。ここで、$\hat{a}_i$ は a_i を除くという記号です。n が２と３のときには

$$\partial(\langle a_0 a_1 a_2 \rangle) = \langle a_1 a_2 \rangle - \langle a_0 a_2 \rangle + \langle a_0 a_1 \rangle$$
$$\partial(\langle a_0 a_1 a_2 a_3 \rangle) = \langle a_1 a_2 a_3 \rangle - \langle a_0 a_2 a_3 \rangle + \langle a_0 a_1 a_3 \rangle - \langle a_0 a_1 a_2 \rangle$$





$-\langle a_0 a_2 \rangle = \langle a_2 a_0 \rangle$ であり、上の左の図形を見ると、$\langle a_0 a_1 a_2 \rangle$ の反時計回りの向きにしたがって、３辺それぞれの向きを考えてそれらの和 (２次元鎖群の中での和) をとったものが $\partial(\langle a_0 a_1 a_2 \rangle)$ であることがわかります。

３単体の向きは図示しにくいのですが、やはり $\langle a_0a_1a_2a_3\rangle$ の４つの面それぞれの向きを考えてそれらの和をとったものが $\partial(\langle a_0a_1a_2a_3\rangle)$ になります。$-\langle a_0a_2a_3\rangle = \langle a_0a_3a_2\rangle, -\langle a_0a_1a_2\rangle = \langle a_0a_2a_1\rangle$ に注意すると、回転して重ねたときすべての面に同じ向きがついていることを確かめてください。

このように、単体の面にはもとの単体から定まる向きというものがあり、境界作用素は向きを考えて境界の面の和 (鎖群の中での和) をとったものになっているわけです。

さて、和音のトポロジーに話をもどしましょう。

３和音のときは、C(構成音 ceg) と Em(構成音 egb) をつなぐのに $\langle ceg\rangle$ と $\langle egb\rangle$(両方が表) という向きでは、頂点を合わせてつなぐことができませんでした。

$$\partial(\langle ceg\rangle) = \underline{\langle eg\rangle} - \langle cg\rangle + \langle ce\rangle, \quad \partial(\langle egb\rangle) = \langle gb\rangle - \langle eb\rangle + \underline{\langle eg\rangle}$$

なので、$\langle ceg\rangle$ と $\langle egb\rangle$(両方が表) という向きのとき、eg の辺には同じ向きがつきます。このように、同じ記号のついた辺にもとの単体 (この場合３角形) から定まる向きに同じ向きがついていると、頂点を合わせてつけるには重ねるしかなく、両側から共通の辺をはさむようにくっつけるということはできないのです。こうして、C に Em をくっつけるときにどちらかの向きを変える必要がでてくるわけです。

一方で、４和音のときは

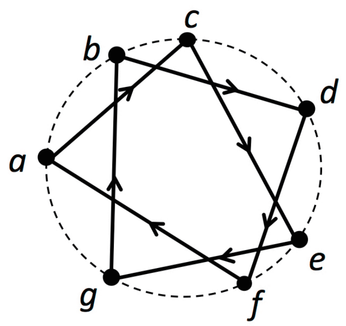
$$\begin{aligned}\partial(\langle cegb\rangle) &= \underline{\langle egb\rangle} - \langle cgb\rangle + \langle ceb\rangle - \langle ceg\rangle,\\ \partial(\langle egbd\rangle) &= \langle gbd\rangle - \langle ebd\rangle + \langle egd\rangle \underline{-\langle egb\rangle}\end{aligned}$$

であり、それぞれの面 egb には逆の向きがついています。このように、同じ記号のついた２つの面において、それぞれがもとの単体 (この場合４面体) から定まる向きが逆になっていると、それぞれの単体はそのままの向きで両側からその面をくっつけることができます。これが３和音のときと４和音のときの違いで、この違いが出来た図形が向きづけ可能か不可能かに影響します。

上の考察を見て気づいたかもしれませんが、和音のトポロジーでつなぐ辺や面は境界作用素で境界をとったときの最初と最後の項になっています。和音を取るときに

$$\cdots \to c \to e \to g \to b \to d \to f \to a \to c \to e \to g \to b \to d \to f \to a \ldots$$

という一つおきに巡回する音を考え、そこから並んでいる３音を取るときに３和音、並んでいる４音を取るときに４和音ができたわけです。視覚的にわかりやすくするために、下図の線分を矢印のようにたどることにしましょう。(音の間隔が一定でないのは、半音のところと全音のところを区別したからです)



この図で２つの (端点で) つながっている線分を考えその頂点の３音が３和音の構成音で、３つのつながっている線分が含む４頂点の４音が４和音の構成音です。矢印のようにたどることを約束すると、３和音のときも４和音のときも最初の出発点の音が和音の名前の大文字のアルファベットで表されているものです。

この矢印の図形を考えるとき、例えば、３和音において bd を含む和音は、bd の前にある g を含んだ gbd(つまり G) と bd の後にある f を含んだ bdf(つまり Bm(♭5) の二つになります。bd の前にある g を含んだ $\langle gbd \rangle$ で $\partial(\langle gbd \rangle)$ を考えると、最初の g を取り除く最初の項に $\langle bd \rangle$ が出てきます。bd の後にある f を含んだ $\langle bdf \rangle$ で $\partial(\langle bdf \rangle)$ を考えると、最後の f を取り除く最後の項に $\langle bd \rangle$ が出てきます。

これは４和音になっても同様で、和音の４面体において他の和音とつながる面の３音は上の図形の２つの線分でつながっている３音です。その前の１音を加えた４和音とその後の１音を加えた４和音でできた４面体がつながります。また、最初と最後に異なる音があるので、前の１音を加えた４和音を境界作用素でうつしたときの最初の項と後の１音を加えた４和音を境界作用素でうつしたときの最後の項が符号を除いて一致します。

問題 1. ３和音、４和音のときと同様に、一つおきの音を並べていった (前ページの図で、矢印の方向に続けて結ばれる) ５音からできる和音は全部で７種類ある。それぞれを 4 単体の頂点に１つずつ音を対応させていくことにより、７種類の頂点に音がついた 4 単体が出来上がる。これらを同じ構成音がある面 (3 単体) でつなげていくとどのような図形 (位相空間) になるか？また、その図形は向きづけ可能か？

もちろん、4 単体は４次元ですから、実際に模型を作ることはできません。

さて、５和音の次は６和音も同様に ... といいたいところですが、６和音では以下のような違いが出てきます。

例えば、Cmaj7$^{(9,11)}$(構成音 c, e, g, b, d, f) を考えると、もちろん、Em7$^{(\flat 9,11)}$ (構成音 e, g, b, d, f, a、このような和音は通常の音楽ではほとんど使われないかもしれませんが、ここは数学的な議論の話としてこれも考えることにします) とは $egbdf$ の面でつながり、Am7$^{(9,11)}$(構成音 a, c, e, g, b, d) とは $cegbd$ の面でつながります。しかし、Cmaj7$^{(9,11)}$ には、c, g, b, d, f という面もありますが、この構成音の面は G7$^{(9,11)}$(構成音 g, b, d, f, a, c) にもあります。このように、境界作用素で出てくる最初と最後の項の面以外にも共通な面が出てきてしまうので、同様にはできません。

問題 2. ３〜５和音のときと同様に c, d, e, f, g, a, b の音を円上に並べ、(円上を回りながら) 一つおきの音を並べた６音からできる和音は全部で７種類ある (７音から１つの音を除いたと考えた方がよいかもしれない)。それぞれの和音を 5 単体の頂点に１つずつ音を対応させていくことにより、頂点に音がついた 5 単体が 7 個できる。

(1) 6 頂点に音がついた 5 単体において、その 4 次元の面 (5 個の構成音からなる) を考えるとき、7 個の 5 単体の４次元の面の総数は $7 \times 6 = 42$ 個であるが、このうち、同じ構成音からなる面は３つ以上存在しない。その理由を述べよ。

(2) これらの７個の 5 単体を同じ構成音の 4 次元の面でつなげていくとどのような図形 (位相空間) になるか？

(原 靖浩)