A survey on the new proof of Saito-Kurokawa lifting after Duke and Imamoḡlu

Tomoyoshi Ibukiyama
Department of Mathematics, Graduate School of Science,
Osaka University

Contents

1 序文

このノートは、齋藤・黒川リフティングの Koecher-Maass series を用いた別証に関する上述の論文（文献 [7]）の比較的技術的な解説を目的としている。使用されるテクニックは皆スタンダードなので、期せずしてなかなか教育的な論文となっているように思う。定理自身に新しい点はないが、自分自身の近年の仕事から考えて、手法的に非常に興味を感じるし、また多くの想像をかき立てられた。

本文では、論文の細部にわたって正確に読めるように、原則的にはかなり細かい証明をつけるか、ないしは、はっきりした文献を引用するかした。原論文が短く、議論が省略された部分が非常に多いためである。特に解析的な部分の説明は、原論文ではほとんどなされていない。細部の理解は場所によってはかなりの努力を要した。時間的制約から、完璧に具体的な計算を詰めていない部分もあるので、万一流用されるときは注意されたい。初等的な部分も書いたが、これは筆者自身の備忘録のつもりでもある。そこまで必要ないという向きには、最初の節だけ読まれることをお勧めする。原論文を読み解く補助になれば幸いである。

なお、特に注意しておくが、以下でジーゲル保型形式の重さ k が偶数という仮定は（やや見えにくいかもしれないが）はっきり使用している。現在のところ重さが奇数のジーゲル保型形式のリフティングに関する理論は（筆者の知る限り）存在しないと思う。

ここで少し蛇足をつけるのをお許し願いたい。サマースクールも今回で第５回となったが、私見によればこれまでの４冊の報告集はいずれも力作が多く、すでに貴重な文献となっているように思う。私が今回解説したことも、多かれ少なかれ、もっとずっと一般的な枠組みで過去にも取り上げられている。振り返ってこれらを見るに、感じるところが多かった。この点でサマースクールの当初の意図はすでに相当程度実現されていると言って良いように思う。

2 概観

まず最初に、理論をある程度知っている人のために、全体のおおざっぱな解説を述べる。従って、この節では用語の正確な定義はしない。不明な点は次節以降をお読みいただきたい。

偶数 k を固定し、$\Gamma_0(4)$ に関する、重さ $k-1/2$ のカスプ形式 $f(z) \in S^+_{k-1/2}(\Gamma_0(4))$ を

とる。

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}c(n)e^{2\pi inz}\in S_{k-1/2}^{+}(\Gamma_0(4)).$$

ここで $f(z)$ がヘッケ作用素の固有関数であることは仮定しないが、いわゆるコーネンの plus space に入っていることは仮定する。この f に対して、2次の正定値半整数対称行列

$$T=\begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}$$

の関数 $A(T)$ を次のように定義する。

$$A(T)=\sum_{e|g.c.d.(a,b,c)}d^{k-1}c(\det(2T)/d^2).$$

さらに2次のジーゲル上半空間上の関数 $F(Z)$ を

$$F(Z)=\sum_{T>0}A(T)e^{2\pi itr(TZ)}$$

と定義する。彼らの論文の目的は、この $F(Z)$ が $Sp(2,\mathbb{Z})$ に関する、重さ k のジーゲルカスプ形式であるという Maass, Andrianov, Zagier 等による証明の別証を与えることである。彼らの証明の概要は以下の通りである。

1. 太田香氏 (= Kaori Imai) の逆定理を用いる。すなわち F の（量指標付きの）Koecher-Maass 級数が、十分多くの量指標について関数等式を満たせば F がジーゲル保型形式という定理を使う。ここで次数2なら、Maass の意味での量指標というのは、実は上半平面上の（重さ0の） Maass wave form に他ならない。逆定理の仕組みは大体次の通りである。$Z\to -Z^{-1}$ についての保型性を、Dirichlet 級数の関数等式に帰着したい。これは正則性より Z の虚部だけで考えればよいが、さらに虚部 Y を $t=\det(Y)$ と $W=\det(Y)^{-1/2}Y$ にわけて、$F(iY)$ を t で Mellin 変換する。この Mellin 変換 $\tilde{F}(s,W)$ は s と W の関数であるが、s についての関数等式が保型性を意味するのは普通の逆 Mellin 変換ですぐわかる。一方、これは W についての2乗可積分関数 (= 上半平面の $SL_2(Z)$ 不変な L^2 関数）でもあるので、もし L^2 空間のわかりやすい基底が与えられれば、その基底に関する係数で必要な関数等式が記述できる。ここでラプラシアンについての固有関数で「基底」を記述したいのだが、連続スペクトルの存在により、L^2 に属する固有関数で基底が張られるわけではない。しかしラプラシアンに関するスペクトル分解の具体型は、かなりはっきりわかっているのでこれを用いて関数等式の条件を言い換えられる。すなわち「基底」にたいする「係数」は「スペクトル固有関数」となる（L^2 の元とは限らない無限個の）Maass wave forms $u(W)$ と $\tilde{F}(s,W)$ の内積に対する条件に書き換えられる。これは実は F の u 付きの Koecher-Maass 級数にほかならない。以上が太田香氏の逆定理のおおざっぱな内容である。

われわれの特殊な場合について以上から結論できることは、関数等式を証明すべきディリクレ級数は f と $u(z)$ の convolution product のようなもの、すなわちその係数が $c(n)$ と $u(T)$ の $\det(2T)=n$ における「平均値」(流行語で言えば Heegner points での平均値）の積になっているディリクレ級数ということである。

2. 上述のディリクレ級数の関数等式を証明するために、まず最初に、これが本当に保型形式（のような関数）の convolution product になっていることを示す必要がある。Maass wave form u が cusp form の場合には、Katok-Sarnak の結果によれば u の Heegner points での平均値は、重さ ($=K$-type) が 1/2 の、ある実解析的 Maass form の負整数でのフーリエ係数に等しい。これは、新谷、Waldspurger, Kohnen-Zagier 等の結果の実解析関数版である。（実は証明も新谷 [38] とほとんど同様。）つまり、虚２次体については「サイクル上の積分」は「値の平均値」と読み替えられ、これが重さ 1/2 の保型形式の負整数でのフーリエ係数と等しいことになる。Wave form u がカスプ形式で無い場合（すなわち特殊なパラメーターのアイゼンシュタイン級数か、または定数関数の場合）は、Duke と Imamoḡlu が直接計算により同様の対応を示した。すなわち重さ 0 のアイゼンシュタイン級数に対しては、重さ 1/2 のアイゼンシュタイン級数をとればよい。これは後者のフーリエ係数を直接みることにより示される。（フーリエ係数の計算はよく知られている。）定数関数に対しては、対応する関数は、重さ 1/2 のラプラシアンの固有関数にはならない。実際には重さ 1/2 の（パラメータ s の）アイゼンシュタイン級数の $s=1$ での極の部分を取り除き、正則部分だけとりだせばよい。このようにしても、極の留数はテータ関数なので、群に対する保型形式の変換法則は相変わらずみたしているが、不変微分作用素の固有関数ではないので普通の意味での保型形式 (いわゆる Maass form) ではない。

3. 以上により問題のディリクレ級数は保型性を満たす関数の係数の convolution なので、重さが $-k=-(k-1/2)-1/2$ の $\Gamma_0(4)$ に関する実解析的アイゼンシュタイン級数を用いて、Rankin-Selberg convolution で表すことができる。（関数の積において複素共役はとっていない。）さて、ここで一見関数等式はアイゼンシュタイン級数の関数等式に帰着するかに見えるがもう少し問題がある。すなわち $\Gamma_0(4)$ はカスプを３つ持っているので、アイゼンシュタイン級数の関数等式の右辺には各カスプに対応する３種類のアイゼンシュタイン級数が現れるからである。よってカスプ 0 と 1/2 に対応するアイゼンシュタイン級数を $i\infty$ のものに帰着するには、保型形式側での $z\to -1/4z$, および $z\to -1/4z+1/2$ なる変換に対する振る舞いを記述する必要がある。しかし、実は重さ 1/2 の保型形式はいわゆるコーネンの plus space からとっておけるので、この振る舞いはコーネンとザギエの方法 （[19], [20]) でよくわかる。これで関数等式が示される。

4. この論文にはヘッケ理論は無く、もちろんその証明も無い。また、Maass space への全射も示されていない。これらの点から言えば、齋籐・黒川リフトについての結果の一部しか示していないわけである。しかし、これは Koecher-Maass 級数がリフティングに有用であることを示した初めての論文であり、手法的におもしろいと思う。筆

者自身、昔 Boecherer とこのような方向の可能性について意見交換したことがあったが、２人とも何もしなかったのは今にして思えば大変残念だった。

3 重さ半整数の保型形式と志村対応

齋籐・黒川リフトの解説を始める前に必要な復習をしておく（cf. [36], [19]。) n 次のジーゲル上半空間を H_n とかく（定義は上田氏の記事を参照。）しばらくは $n=1$、すなわち普通の複素上半平面の話を述べる。$SL_2(\mathbb{Z})$ の部分群 $\Gamma_0(4)$ を

$$\Gamma_0(4) = \{g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z});\ c \equiv 0 \bmod 4\}$$

で定義する。さて、重さが半整数の保型形式を定義したいのだが、保型因子 $(cz+d)^{1/2}$ の分岐をどうとるのかが問題になる。今 $g \in SL_2(\mathbb{R})$, $z \in H_1$ について $J(g,z) = cz+d$ とおくと、$J(g_1g_2, z) = J(g_1, g_2z)J(g_2, z)$ が成り立つが、これは $f(z) \to f(gz)J(g,z)^{-k}$ (k は整数）が群の作用であることを保証するために必要な条件である。従って平方根の取り方も (c,d) ごとに勝手にとるのではなく、上のような条件 (cocycle condition) を満足するように上手に一斉に選ばなくてはならない。そのために H_1 上の次の関数を考える。

$$\theta(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{2\pi i n^2 z}.$$

これはテータ関数、ないしはテータ定数（theta constant) と言われる関数のひとつであり、慣用的な記号では $\theta_{00}(2z)$ ともかかれる。$\gamma \in \Gamma_0(4)$ に対して

$$\theta(\gamma z)/\theta(z) = (\frac{c}{d})\epsilon_d^{-1}(cz+d)^{1/2}$$

が知られている。ここで、$(cz+d)^{1/2}$ の分岐は主値をとり、$d \equiv 1 \bmod 4$ では $\epsilon_d = 1$, $d \equiv 3 \bmod 4$ では $\epsilon_d = i$, また、$(\frac{c}{d})$ は平方剰余記号（定義はかなり微妙である。正確な意味は Shimura [36] を参照。）通常この比を重さ 1/2 の保型因子として採用する。（この種のテータ関数の意味については昨年度の第４回サマースクールの報告集 [51] に詳しく解説されている。第１回の報告集も関連が深い。）以下整数 k を１つ固定する。H_1 上の正則関数 $f(z)$ で、任意の $\gamma \in \Gamma_0(4)$ に対し

$$f(\gamma z) = (\frac{\theta(\gamma z)}{\theta(z)})^{2k-1} f(z)$$

を満たし、かつ $\Gamma_0(4)$ の各カスプで有界なものを重さ $k-1/2$ の $\Gamma_0(4)$ に関する保型形式といい、このような関数のなす線形空間を $M_{k-1/2}(\Gamma_0(4))$ と書く。各カスプで 0 になるものをカスプ形式といい、その空間を $S_{k-1/2}(\Gamma_0(4))$ と書く。これらの関数は $z \to z+1$ で不

変であるから、フーリエ展開を持つ。Kohnen は志村対応を正確に記述するために次のような空間を導入した。

$$M^+_{k-1/2}(\Gamma_0(4)) = \{f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c(n)e^{2\pi inz};\ c(n) = 0,\ \text{if } (-1)^k n \equiv 1,\ 2 \bmod 4\}.$$

また $S^+_{k-1/2}(\Gamma_0(4)) = M^+_{k-1/2}(\Gamma_0(4)) \cap S_{k-1/2}(\Gamma_0(4))$ とおく。これらを Kohnen の plus space と呼ぶ。この定義は一見人工的に見えるが、次のような作用素での特徴づけがある。すなわち

$$\begin{aligned}(f|U_4)(z) &= \frac{1}{4}\sum_{\nu=0}^{3} f(\frac{z+\nu}{4}),\\ (f|W_4)(z) &= (-2iz)^{-k+1/2}f(-1/4z)\end{aligned}$$

と定義すると、$f \in S_{k-1/2}(\Gamma_0(4))$ が $f \in S^+_{k-1/2}(\Gamma_0(4))$ でもあるための必要十分条件は $f|U_4W_4 = i^{k^2-k}2^{k-1}f$ となることである。

ヘッケ作用素について最小限の復習をする。各素数 p に対して $f \in M^+_{k-1/2}(\Gamma_0(4))$ について、

$$f|T^+_{k-1/2}(p^2) = \sum_{(-1)^k n \equiv 0,3 \bmod 4} (c(p^2n) + (\frac{(-1)^k n}{p})p^{k-2}c(n) + p^{2k-3}c(n/p^2))e^{2\pi inz},$$

また、$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n)e^{2\pi inz} \in M_{2k-2}(SL_2(\mathbb{Z}))$ つまり、重さ $2k-2$ の $SL_2(\mathbb{Z})$ に関する普通の正則保型形式 $g(z)$ について

$$g|T_{2k-2}(p) = \sum_{n=0}^{\infty}(a(np) + p^{2k-3}a(n/p))e^{2\pi inz}$$

とヘッケ作用素を定義する。

Theorem 1 (cf. [19]) $S^+_{k-1/2}(\Gamma_0(4))$ から $S_{2k-2}(SL_2(\mathbb{Z}))$ への線形同型写像 $f \to g$ で、すべての素数 p に対して、$T^+_{k-1/2}(p)$ と $T_{2k-2}(p)$ の作用が可換となるようなものが存在する。また、f と g がすべての p に対し、上記のヘッケ作用素の同時固有関数なら、フーリエ係数の間に次のような関係がなりたつ。

2 次体の基本判別式 d_K で $(-1)^k d_K < 0$ となるもの (ただし、$K = \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}$ のときも考え、このときは $d_K = 1$ とみなす) をとると、いつでも

$$L(s-k+2, \chi_K)\sum_{n=1}^{\infty} c(|d_K|n^2)n^{-s} = c(|d_K|)\sum_{n=1}^{\infty} a(n)n^{-s}$$

がなりたつ。

ここで $c(|d_K|)=0$ なら両辺とも 0 で何も意味しないが、どこかで 0 でなくなるので、f から g を思い出すのはやさしい。ところで一見上の定理からすると重さ半整数の保型形式のほうが情報量が多いようにも見えるのだが、同型なのだから g から f が思い出せるべき（たとえば $c(|d_K|)$ が g の言葉でかけるべき）である。これに最初に解答したのが新谷 [38] である。たとえば k が奇数のときは $g \in S_{2k-2}(SL_2(\mathbb{Z}))$ および $n \equiv 0, 1 \bmod 4$ に対して、対応する f のフーリエ係数 $c(n)$ は大ざっぱにいて g に 2 次形式で重みをつけ、測地線上でこれを積分したものを $\det = n$ なる 2 次形式の $SL_2(\mathbb{Z})$ 同値類で和をとったものでかける。(cf. [38], [20]) 詳しく書くのは面倒だし、本筋と関係ないので略すが、これの実解析的な類似が後で必要になる。

4 齋籐・黒川リフト

すでに序文で述べたように、 $f \in S^+_{k-1/2}(\Gamma_0(4))$ にたいし、$F(Z)$ を section 2 で述べたように定義して、これが 2 次のジーゲル保型形式（もちろんカスプ形式）になるのを証明するのが新証明の目的である。しかしこれだけでは齋籐・黒川リフトの一部の主張にすぎないので、もう少し歴史的背景を述べてみる。次数 2 のジーゲルアイゼンシュタイン級数のフーリエ係数 $A(T)$ について、Maass は完全な公式を求めた。そこで次のような関係が成り立つことを示した。（今 $T>0$ のみ考えることにしておいて）正定値半整数対称行列 $T=\begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}$ の a, b, c の最大公約数を $e(T)$ と書こう。

1. T が原始的、すなわち $e(T)=1$ ならば、$A(T)$ は $\det(T)$ のみによる。

2. 一般には
$$A(T)=\sum_{d|e(T)} d^{k-1} A\begin{pmatrix} 1 & b/2d \\ b/2d & ac/d^2 \end{pmatrix}$$
である。とくに $A(T)$ は $\det(T)$ と $e(T)$ のみによる。

以上のような関係を Maass relation と呼ぶことにしよう。Resnikoff と Saldana は、カスプ形式についてもフーリエ係数を実際に計算して重さの小さいカスプ形式（重さ 10 や 12）でも、Maass relation が成り立ちそうなことを実験で示した (cf. [33]。) かれらはすべての保型形式でこれが成り立つかもしれないと論文に書いているようだが、それほど世の中は単純にはできていなかった。黒川氏はフーリエ係数を重さ 20 のカスプ形式まで計算して、実験数値からして Maass relation が成り立ちそうな（ヘッケ作用素の同時固有関数である）重さ k のカスプ形式 F については、いつでも同時固有関数 $g \in S_{2k-2}(SL_2(\mathbb{Z}))$ が存在して
$$L(s,F)=\zeta(s-k+1)\zeta(s-k+2)L(s,g)$$
となるらしいことを発見した。ここで左辺は F のスピノールゼータ（菅野氏の記事を参照）である。また、Maass relation が成り立たない具体例も挙げた。そしてフーリエ係数

が Maass relation を満たすジーゲル保型形式の空間を Maass space ということになった。(この空間はヘッケ作用素で不変であるのは比較的容易。) もう一度当初の予想を標語的に述べれば、Maass space の元は 1 変数からのリフティングで得られ、L 関数の間にきれいな関係があるというものである。

さて、証明は、この version では、Maass, Andrianov の研究を経て最終的には Zagier により解決された。方法は、志村対応を使って、重さ $k-1/2$ のカスプ形式 $f \in S^+_{k-1/2}(\Gamma_0(4))$ との対応に書き直し、さらに $S^+_{k-1/2}(\Gamma_0(4))$ と、重さ k、index 1 のヤコービ形式の空間の同型をいい、さらにこれをジーゲル保型形式まで上手に外挿して F を構成するというものである。以上の各段階でヘッケ作用素との交換関係を言っておけば L 関数の関係も得られる。証明は大変簡明であり、読みやすい (cf. [49]。)

新証明はこれとは全く発想が異なるが、得られた内容はやや少ない。しかし新証明の発想で、何か知られていなかった（齋籐・黒川予想と異なる）新しいことが証明できるかどうか、非常に興味深い。

5 Maass form と不変微分作用素

この節では、（重さが k の）不変微分作用素の定義などを復習し、$SL_2(\mathbb{Z})$ の Maass form of weight k の定義を述べる。実解析的保型形式の入門編とお考えいただきたい。（ただし群上の話にまでは踏み込まない。 cf. Bump [4]). 叙述を簡単にするためにこの節では k は偶数とする。

5.1 不変微分作用素

任意の $k \in \mathbb{C}$ に対して、H_1 上の関数に対する微分作用素を次のように定義する。cf. Maass [28].

$$\begin{aligned}\Delta_k &= y^2(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}) - iky\frac{\partial}{\partial x},\\ L_k &= -iy\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}-\frac{k}{2},\\ R_k &= iy\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+\frac{k}{2},\end{aligned}$$

作用素として簡単に次の等式を得る。

$$\Delta_k = L_{k+2}R_k + \frac{k}{2}(1+\frac{k}{2}) = R_{k-2}L_k - \frac{k}{2}(1+\frac{k}{2}).$$

次に整数 k と H_1 上の関数 $f(z)$、 $g \in SL_2(\mathbb{R})$ に対して

$$f|_k g = \left(\frac{cz+d}{|cz+d|}\right)^{-k} f(gz)$$

と定義すると

$$\begin{aligned}(R_k f)|_{k+2} g &= R_k(f|_k g),\\ (L_k f)|_{k-2} g &= L_k(f|_k g),\\ (\Delta_k f)|_k g &= \Delta_k(f|_k g).\end{aligned}$$

となる。これより、 Δ_k は不変微分作用素である。(群の上でのより本質的な記述は [4])

あとで使用するので、1つ直接的な応用を書いておく。$\Gamma_0(4)$ の重さ $-k$ のアイゼンシュタイン級数 $E^{-k}(z,s)$ を

$$E^{-k}(z,s) = \frac{1}{2}\sum_{\Gamma_\infty\backslash\Gamma_0(4)} \left(\frac{cz+d}{|cz+d|}\right)^k \mathrm{Im}(\gamma z)^s.$$

と定義する。ここで

$$\Gamma_\infty = \{\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\ n \in \mathbb{Z}\}$$

とおいた。すると L_k と $SL_2(\mathbb{R})$ の作用の交換関係より

$$L_{-k}(E^{-k}(z,s)) = (s+k/2)E^{-k-2}(z,s),$$

がすぐにわかるので

$$L_{-k+2}L_{-k+4}\cdots L_{-2}L_0E^0(z,s) = \frac{\Gamma(s+k/2)}{\Gamma(s)}E^{-k}(z,s).$$

となる。

5.2 Maass form of weight k の定義とフーリエ展開

任意の偶数 k に対して次の3つの条件を満たす H_1 上の関数 $u(z)$ を $SL_2(\mathbb{Z})$ に関する重さ k の Maass form という。

1. 任意の $\gamma \in SL_2(\mathbb{Z})$ について
$$\phi(\gamma z) = \phi(z)\left(\frac{cz+d}{|cz+d|}\right)^k.$$
2. $u(x+iy)$ は x, y に関して C^∞ 級であり、ある複素数 λ に対して、$\Delta_k\phi(z) = -\lambda\phi(z)$.
3. ある $N > 0$ があって、$u(x+iy) = O(y^N)$ $(y \to \infty)$.

特に $f(z)$ が重さ k の普通の正則保型形式なら $y^{k/2}f(z)$ は、Maass form of weight k になるので、上は普通の保型形式の定義を含んでいる。さて、実際は Δ_k が elliptic operator であることより、条件 (2) から u は常に実解析的になる。このような関数は Whittaker 関数を用いてフーリエ展開される。サマースクールの性格も考えてこのあたりを詳しく解説してみよう。なお、フーリエ解析の本はあまた存在しているが、これから述べる程度の話には、たいてい難しすぎてかえって役に立たない。高木貞治の解析概論第６章７４節と７５節がベストであろう。まず $\mathbb{R}$ 上の周期 1 の関数、つまり $f(x+1)=f(x)$ なる関数を考える。整数 n (正でも負でも 0 でもよいが）に対し

$$a_n=\int_0^1 f(x)e^{-2\pi inx}dx$$

とおき、これを $f(x)$ のフーリエ係数という。無限級数 $\sum_{n\in\mathbb{Z}}a_ne^{2\pi inx}$ を考える。これをフーリエ級数という。これは一般には収束しないし、たとえ収束しても $f(x)$ に戻るとは限らない。しかし、 $f(x)$ が C^1 級関数ならば、フーリエ級数は絶対かつ一様に収束して、$f(x)$ に一致する。([40] p. 278 定理 65.) さて、Maass form u を考えよう。これは $u(z)=u(z+1)$ であるから、 x に関して周期 1 であり、

$$u(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}B(n,y)e^{2\pi inx}$$

とフーリエ展開される。x に関する一様収束性により、x については項別積分可能であるが y についてはどうであろうか。フーリエ係数の定義より

$$\frac{\partial}{\partial y}B(n,y)=\int_0^1\frac{\partial u(x+iy)}{\partial y}e^{-2\pi inx}dx$$

となるので、係数の微分が u の微分のフーリエ係数になり、

$$\frac{\partial}{\partial y}u(x+iy)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{\partial}{\partial y}B(n,y)e^{2\pi inx}$$

となるわけである。ついでに言えば、$u(z)$ のフーリエ展開は H_1 の任意のコンパクト集合上で一様収束である。実際、部分積分より

$$B(n,y)=\frac{1}{2\pi in}\int_0^1\frac{\partial u}{\partial x}(x+iy)e^{-2\pi inx}dx=-\frac{1}{4\pi^2n^2}\int_0^1\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x+iy)e^{-2\pi inx}dx$$

であり、最後の積分は y についてコンパクト集合上で有界である。よって $|B(n,y)|<Cn^{-2}$ および $\sum_{n\neq 0,n\in\mathbb{Z}}|B(n,y)|<2C\zeta(2)$ より、フーリエ展開は (x,y) について広義一様収束なのである。しかし以上では $y\to\infty$ ではどうなっているかは全く述べていない。実は後ですぐ示すように、$n\neq 0$ なら $B(n,y)\to 0$ ($y\to\infty$）である。ならばたとえば $u(x+iy)-B(0,y)$ は $y\to\infty$ で 0 になるのであろうか？このような問いはそれほど自明なわけではないと思

う。（各項別に極限をとって良いというのは、でたらめに一般の関数をとると疑わしいのではないか。）この部分はもう少し深い考察が必要になる。

さて、微分作用素の固有関数であるという条件について考える。以上の考察で明らかになったように、フーリエ展開は y についても何回でも項別微分してもよい。よって Δ_k の固有関数という条件から各 $B(n,y)$ に関する微分方程式が出る。$n \neq 0$ なら、この微分方程式は Whittaker の微分方程式になり（付録参照）、一般に Whittaker の微分方程式は $y \to \infty$ で漸近的に $\sim y^{\alpha}e^{-y/2}$ および $\sim ((-y)^{-\alpha}e^{y/2})$ （つまり比が 1 に収束）なる増大度を持つ 2 つの基本解 $W_{\alpha,\beta}(y)$ と $W_{-\alpha,\beta}(-y)$ をもつ。よって我々の u に対する増大度の条件はフーリエ係数 $B(n,y)$ でも（その積分表示により）同様に成り立つから、微分方程式の適する答えは定数倍をのぞき、ただ一つである。よって $\lambda = 1/4 + r^2$ と書くとき、$n \neq 0$ ならば適当な定数 $b(n)$ をとって

$$B(n,y) = b(n)W_{ksgn(n)/2,ir}(4\pi|n|y)$$

と書けることがわかる。（sgn は符号のことである。関数の記号は付録を参照されたい。）特に任意の $n \neq 0$ と $N > 0$ について $B(n,y) = O(n^{ksgn(n)/2}(ny)^{-N})$ $(y \to \infty)$ である。よって $\sum_{n\neq 0} |B(n,y)| = O(y^{-N})$ などとなる。定数項 $B(0,y)$ は微分方程式から考えれば y のべき、ないしはそれと $\log y$ の積の一次結合になっている。ここは 0 でなければ y について rapid decay ではない。$B(0,y) = 0$ のとき $u(z)$ をカスプ形式という。

以上により

$$u(x+iy) = B(0,y) + \sum_{n=-\infty, n\neq 0}^{\infty} b(n)W_{k\,sgn(n)/2,ir}(4\pi|n|y)$$

となるが、簡単のため $b(n)$ のことをフーリエ係数と言うことにする。

5.3　増大度の条件について

保型形式の増大度について、詳しく述べてある文献は意外に少ないので、ここでまとめてみたい。一般には行列群 G 上の関数 F で $F(g) < C||g||^N$ を満たすものを moderate growth といい、これが保型形式の増大度条件に使われる（ただし $||g||$ は代数群としての適当な埋め込みでのノルム。）このような一般論には深入りしない (cf. Harish-Chandra [11] p. 6 など。）

以下 $SL_2(\mathbb{Z})$ の場合のみ考えるが、部分群の場合も、各カスプで増大度条件をつけ、かつ各カスプでの近傍 $\{(x,y); |x| < c,\ y > d\}$ で基本領域が覆われることなどををもちいれば、修正はすべて容易である。

Lemma 1 上半平面上の関数 $u(z)$ が $SL_2(\mathbb{Z})$ 不変で、かつ適当な $C > 0$ について

$$u(x+iy) = O(y^N) \qquad y \to \infty \text{ (基本領域上で } x \text{ について一様)}$$

ならば、適当な $N_2 > 0$ について

$$u(x+iy) = O(y^{-N_2}) \qquad y \to 0 \text{ (}x\text{ について一様)}$$

である。

証明：たとえば Zagier [50] p.421 などにもある。$u(z)$ は平行移動不変だから、上の仮定で実際は x が基本領域以外を動いてもかまわない。結論で x は基本領域と何の関係もない点は注意すべきである。証明しておく。適当な正の数 T と C について $y > T$ ならば $u(z) < Cy^N$ としてよい。基本領域で考えれば、$y \le T$ の部分はコンパクトだから、C を取り直して $SL_2(\mathbb{Z})$ の基本領域 $\mathcal{D}$ のすべての点で上の評価が成り立つとして良い。$z \in H_1$ に対し、$\gamma(z) \in \mathcal{D}$ ($\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$) とすると、$u(\gamma(z)) < C\mathrm{Im}(\gamma(z))^N$ だが $c \neq 0$ にたいしては

$$\mathrm{Im}(\gamma(z)) = y/|cz+d|^2 \le y/c^2y^2 \le y^{-1}.$$

よって証明された。

Lemma 2 関数 $u(z)$ を前の補題の通りとすると、適当な $C > 0$ と $N > 0$ に対して

$$|u(z)| < C(y+y^{-1})^N \le C(y+y^{-1}+x^2y^{-1})^N \ z \in H_1$$

となる。

証明：$u(z)$ は $SL_2(\mathbb{Z})$ 不変だから、 $|x| \le 1/2$ で考えればよい。$y > T_1$ で $C_1y^{N_1}$ 以下、$y < T_2$ で $C_2y^{-N_2}$ 以下としてよく、 $T_1 \le y \le T_2$ はコンパクトだからどうにでも評価できる。 2 番目の不等式は当たり前。q.e.d.

この補題の最後の不等式は、u を $SL_2(\mathbb{R})$ 上の関数と思ったときの moderate growth の条件になっている。この条件から逆に $u(z) = O(y^N)$ （$y \to \infty$) が出るのも明らかである。

Lemma 3 $u(z)$ を $SL_2(\mathbb{Z})$ に関する *Maass form* とする。正整数 h に対して $C > 0, N > 0$ が存在して $u(z)$ を x, y で h 回偏微分した関数 $v(z)$ に対し

$$v(z) < C(y+y^{-1}+x^2y^{-1})^N$$

がなりたつ。

一般論は（証明はちょっと思いつけないくらいスマートだが）、Harish-Chandra [11] p. 15 Lemma 14, または Bump [4] p. 280 Theorem 3.2.1 にあり、結果の強さも込めてベストであろう。本報告集の村瀬氏の項も参照されたい。お望みなら、直接どろくさくやることもできないわけではない。すなわち、まずフーリエ展開より、基本領域上で $v(z) = O(y^N)$

$(y \to \infty)$ が簡単にわかる。同時に $(y + y^{-1} + x^2 y^{-1})^N$ でも押さえられる。しかしこれはもはや $SL_2(\mathbb{Z})$ 不変ではないので、基本領域外に結論をのばそうとすると少し考察がいる。$u(\gamma z) = u(z)$ の両辺を微分してみる。たとえば $u(z)$ は実際は $z, \bar{z}$ の関数だから、$\gamma(z)$, $\gamma(\bar{z})$ に $\partial, \bar{\partial}$ を作用させれば絶対値は $|cz+d|^{-2}$ 変わる。これは $\leq max(1, y^{-2})$ である。以上より偏微分の回数に関する帰納法を用いれば証明される。

さて、さいごにフーリエ係数の増大度との関連を注意しておく。(この項は Hecke によるといってよいであろう。)

Lemma 4 $u(z)$ を *Maass form* とする。$u(z) = O(y^{-c})$ *$(y \to 0$, uniform on $x)$* とすると、$b(n) = O(|n|^c)$ *$(n \to \infty$ $)$* である。よって特にディリクレ級数 $\sum_{n=1}^{\infty} b(n) n^{-s}$ などは $Re(s)$ が十分大ならば絶対かつ一様に収束する。

証明:

$$b(n) W_{k\, sgn(n), ir}(4\pi |n| y) = \int_0^1 u(z) e^{-2\pi i n x} dx$$

より、 $y < y_0$ について

$$|b(n) W_{k\, sgn(n), ir}(4\pi |n| y)| \leq \int_0^1 |u(z)| dx < M y^{-c}$$

としてよい。$y = |n|^{-1} y_1$ (y_1 は n に無関係) とするとどこかの $y_1 < y_0$ では Whittaker function は消えない。よって

$$|b(n)| < M_2 |n|^c$$

となる。

6 Maass wave form と量指標

この節では、n 次正定値対称行列のなす cone $\mathcal{P}_n$ 上のいわゆる量指標 (Grössen character、定義は Maass [29]) が、$n = 2$ のとき、Maass wave form of weight 0 (前節での $k = 0$ のときの Maass form) に自然に 1 対 1 に対応していることを説明する。

6.1 空間の対応

$\mathcal{PS}_n$ で n 行 n 列の正定値対称行列で行列式が 1 のものの集合をあらわす。$\mathcal{PS}_n$ には $g \in SL_n(\mathbb{R})$ が $Y \to^t g^{-1} Y g^{-1}$ で左から作用している。空間 $\mathcal{PS}_2$ と H_1 には次のような equivariant な微分同型対応がある。

$$H_1 \ni z = x + iy \longleftrightarrow \iota(z) = \begin{pmatrix} y^{-1} & -xy^{-1} \\ -xy^{-1} & y^{-1}(x^2 + y^2) \end{pmatrix} \in \mathcal{PS}_2$$

ここで任意の $g \in SL_2(\mathbb{R})$ に対して $\iota(gz) = {}^tg^{-1}\iota(z)g^{-1}$ である。たとえば $\iota(-1/z) = \iota(z)^{-1}$ などとなる。任意の $Y \in \mathcal{P}_2$ にたいし, $\iota(\det(Y)^{-1/2}Y) \in H_1$ のことを z_Y と書こう。$Y = (y_{ij})_{1\leq i,j\leq 2}$ の成分を用いて書けば $z_Y = y_{11}^{-1}(-y_{12} + i\det(Y)^{1/2})$ である。

$\mathcal{P}_n$ 上の（$GL_2(\mathbb{R})$ の作用に関する）不変測度は定数倍を除き、$dv = \det(Y)^{-(n+1)/2}dY$ である。$n = 2$ なら, $t = \det(Y)$、$z = \iota(\det(Y)^{-1/2}Y)$ とおくとき $dv = t^{-1}y^{-2}\,dt\,dx\,dy$ となるので、$y^{-2}dxdy$ が $\mathcal{PS}_2$ の不変測度に対応する。

6.2 形式

$SL_2(\mathbb{Z})$ に関する H_1 上の Maass wave form $\phi(z)$ (of weight 0) は前節で $k = 0$ として定義される。繰り返すと、

1. $\phi(\gamma z) = \phi(z)$ for all $\gamma \in SL_2(\mathbb{Z})$.
2. $\Delta_0\phi(z) = -\lambda\phi(z)$ for some complex number λ.
3. $f(x + iy) = O(y^\alpha)$ for some $\alpha > 0$ when $y \to \infty$.

である。ϕ がカスプ形式なら Δ_0 の固有値について $\lambda > 1/4$ が知られているので (e.g. Maass)、$\lambda = 1/4 + r^2$ とおけば r は実数になる。一般の wave form ではこれは成り立たない。たとえば ϕ が定数なら $\lambda = 0$, $r = i/2$ である。

さて、一方で一般の n について $\mathcal{P}_n$ の量指標の（Maass の）定義を復習しよう。$\mathcal{P}_n$ 上の関数 $u(Y)$ が次の条件を満たすとき、量指標という。

1. 任意の $g \in GL_n(\mathbb{Z})$ について $u(Y) = u(gY\,{}^tg)$。
2. u は C^∞ 級関数で、$\mathcal{P}_n$ の不変微分作用素すべての同時固有関数、すなわち、ある $\lambda_i \in \mathbb{C}$ $(i = 1,\ldots,n)$ に対し
$$\mathrm{Tr}((Y\frac{\partial}{\partial Y})^i)u(Y) = \lambda_i u(Y).$$
3. $u(Y)$ は斉次 0 次。つまり, $\mathrm{Tr}(Y\frac{\partial}{\partial Y})u(Y) = 0$ である。これは任意の $0 < a \in \mathbb{R}$ について $u(aY) = u(Y)$ を意味する。
4. 任意の非負整数 h に対し正の数 c_h と k_h が存在して $u(Y)$ の任意の h-階導関数が $\mathcal{PS}_n$ 上、$c_h(\mathrm{Tr}(Y))^{k_h}$ で押さえられる。

ここで
$$\frac{\partial}{\partial Y} = \left(\frac{1+\delta_{ij}}{2}\frac{\partial}{\partial y_{ij}}\right)$$
とおいた。

Maass wave form $\phi(z)$ (of weight 0), に対し $\mathcal{P}_2$ 上の関数 $u_\phi(Y)$ を

$$u_\phi(Y) = \phi(\frac{(\det(Y))^{1/2}i - y_{12}}{y_{11}}),$$

（ただし $Y = (y_{ij})_{1 \le i,j \le 2}$）と定義すると $u_\phi(Y)$ は量指標であり、この写像は Maass wave forms (of weight 0) と量指標 ($n = 2$) の全単射を与える。実際、増大度条件以外は形式的な計算ですぐわかる。増大度については、$h = 0$ と Maass wave form の増大度条件が同じことは前節で示した。微分についても、前節の補題から容易にわかる。

7 太田香氏の逆定理

この節は K. Imai (K. Ohta) [15] に基づく。

7.1 $L^2(SL_2(\mathbb{Z})\backslash H_1)$ のスペクトル分解

まず逆定理を記述するのに十分な量指標を用意するために、スペクトル分解定理の復習をする。文献としては [34] が非常に丁寧に書かれているように思うが、ときどき利用できない文献 (Heidelberg の Sitzungs Berichte) が引用してあるのが気になる。[26] では Faddeev を引用しているがわれわれの目的にそこまで必要とは思えない。[41] I, [22] も参照。

さて、$SL_2(\mathbb{Z})\backslash H_1$ 上に $y^{-2}dxdy$ で測度を入れ、H_1 上の $SL_2(\mathbb{Z})$ 不変な関数のなす L^2 空間 $L^2(SL_2(\mathbb{Z})\backslash H_1)$ を考える。この空間の $\Delta_0 = y^2(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2})$ に関するスペクトル分解を考えたい。これは離散スペクトル (Maass wave cusp forms 及び定数関数) と連続スペクトルからなっている。カスプ形式 u は実数値関数にとりなおしてもよく、また $u(-\bar{z}) = \pm u(z)$ となるように取っておける。符号の正負に応じて、関数 u を even または odd という。u は全体で可算個で、正規直交に取り直してよく、これに番号をつけて u_i ($i = 1, 2 \ldots .$) と書くことにしよう。定数関数は正規化すれば（ノルムを 1 にすれば）$\sqrt{3/\pi}$ である。これを u_0 と書こう。残りは連続スペクトルである。$SL_2(\mathbb{Z})$ の（重さ 0 の）アイゼンシュタイン級数

$$E(z,s) = \frac{1}{2} \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash SL_2(\mathbb{Z})} Im(\gamma z)^s$$

を取って、実数 r に対し $E(z, 1/2 + ir)$ を考える。この関数自身は 2 乗可積分ではないが、Δ_0 の固有関数でもある。さて、以上を用意しておくと、任意の $f(z) \in L^2(SL_2(\mathbb{Z})\backslash H_1)$ は

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} (f, u_j) u_j(z) + \frac{1}{4\pi i} \int_{Re(s)=1/2} (f, E_s) E_s(z) ds$$

とかける。ただし (f, g) は

$$\int_{SL_2(\mathbb{Z})\backslash H_1} f(z)\overline{g(z)} y^{-2}\, dx\, dy.$$

と定義される。(この積分は g が L^2 の元でなくても定義される場合があるわけである。) 以上がスペクトル分解定理である。ここにあらわれた u_j $(j=0,1,\dots)$ と $E(z,1/2+ir)$ をスペクトル固有関数という。ちなみに $u_0=\sqrt{3/\pi}$ と $E(z,1/2+ir)$ は明らかに even な関数である。注意として、上記のスペクトル分解の無限和は、一般には当然にも L^2 ノルムでの収束を意味しているだけであるが、$\Delta_0 f \in L^2(SL_2(\mathbb{Z})\backslash H_1)$ ならば、和は関数としても絶対かつ広義一様収束である。(cf. [34] Satz 7.2, Satz 8,1, [41] 3.7 Exercise 17.)

7.2 逆定理

正の整数 k を固定する。 L^+ で 2 行 2 列の正定値半整数対称行列の集合を表す。L^+ 上の関数 $A(T)$ で次の 2 条件を満たすものを考える。

1. 任意の $U \in GL_2(\mathbb{Z})$ に対し
$$a({}^tUTU) = \det(U)^k a(T).$$
2. 正の定数 c があって $|a(T)| < (t_{11}t_{22})^c$ for all $T \in L^+$ となる。

このような $A(T)$ に対し、H_2 上の関数 $F(Z)$ を
$$F(Z) = \sum_{T>0} a(T) e^{2\pi i \operatorname{tr}(TZ)}$$
で定義する。この仮定のもとで、任意のスペクトル固有関数 $\phi(z)$ に対し
$$\Psi(s,\phi) = \sum_{T\in L^+/SL_2(\mathbb{Z})} \frac{a(T)\phi(z_T)}{\det(T)^{s+(k-1)/2}|Aut(T)|}.$$
とおき、さらに
$$\Lambda(s,\phi) = (2\pi)^{-s}\Gamma(s+k/2-3/4+ir/2)\Gamma(s+k/2-3/4-ir/2)\Psi(s,\phi)$$
と定義する。ここで $Aut(T) = \{\gamma \in SL_2(\mathbb{Z});\ \gamma T\,{}^t\gamma = T\}$ とおいた。すると $\Psi(s,\phi)$ は、$\mathrm{Re}(s)$ が十分大で収束する。

Theorem 2 (Imai [15]) *$F(Z)$ を $A(T)$ に対し、上記のようにさだめるとき、$F(Z)$ がジーゲルカスプ形式であるための必要十分条件は $\Lambda(s,\phi)$ が整関数(entire)で s に関して任意の垂直帯状領域で有界であり、つぎの関数等式を満たすことである。*
$$\Lambda(1-s,\phi) = (-1)^k\Lambda(s,\phi)$$
(ただし ϕ はすべての $\phi(-\bar{z}) = (-1)^k\phi(z)$ となるスペクトル固有関数。)

注意: 実はこの定理は、[7] からの引用であるが、もとの K. Imai [15] に記載されている条件とは仮定が少し異なっている。この点、[7] は何も断っていないが、気になったのでこのように変更して良いことについて、[15] の証明のアウトラインも込めて、次の節で証明をつけておいた。

7.3 Mellin 変換とスペクトル分解

逆定理の成り立つ理由を少し解説してみよう。まず $Sp(2,\mathbb{Z})$ は次の 3 種類の変換で生成される。

1. $Z \to Z + S$ （S は対称整数行列）
2. $Z \to UZ^tU$ $(U \in GL_2(\mathbb{Z}))$
3. $Z \to -Z^{-1}$.

$A(T)$ に対する仮定より、前節で定義した $F(Z)$ は（１）と（２）の変換で不変であることがすぐに出る。よって問題は（３）である。これをディリクレ級数の条件に書き直すことを考える。まず Mellin 変換から解説する。$R^+ = (0,\infty)$ 上の関数 $\eta(t)$ に対してその Mellin 変換 $\tilde{\eta}(s)$ は

$$\tilde{\eta}(s) = \int_0^\infty \eta(t)t^{s-1}dt.$$

で定義される。これが $\mathrm{Re}(s) = \sigma \in \mathbb{R}$ （を含む帯状領域）で収束すると仮定すると、適当な条件下で逆変換の公式

$$\eta(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \tilde{\eta}(s)t^{-s}ds$$

が成り立つ。これが成り立つ条件に少し立ち入ってみる。これは実はフーリエ変換とフーリエ逆変換の 1 種である。実際 $t = e^x$ とおけば、Mellin 変換は $\eta(e^x)e^{Re(s)x}$ のフーリエ変換である。この形でなら、逆変換が成り立つための十分条件は Plancherel の定理としていろいろな本に書かれている。（たとえば、伊藤清三 [16] p.225。）すなわち、$L^2(\mathbb{R})$ の元であれば、いつでも平均収束の意味でなら、フーリエ変換とフーリエ逆変換が成立するが、さらに $\eta(e^x)e^{Re(s)x}$ が $\mathbb{R}$ 上で L^1 かつ L^2 （可積分かつ自乗可積分）また $\tilde{\eta}(\sigma + it)$ $(\sigma, t \in \mathbb{R})$ が t について L^1 かつ L^2 ならば、Mellin 逆変換の公式がそのままなりたつ。急減少関数などなら問題ないが、そうでない場合、たとえば、もとが L^1 でも行き先は L^1 とは限らないなど、条件を検証するのはそれなりに面倒になる。もっと弱い条件としては、フーリエ変換の行き先が L^1 であることを犠牲にして、広義積分を考える公式がある（[42] p.46、Theorem 28)。すなわち、$\eta(t)t^{Re(s)}$ の $(0,\infty)$ での積分が絶対収束するとして、さらに $\eta(t)$ が x の近傍で有界変動であると仮定すると

$$\frac{1}{2}(\eta(x+0)+\eta(x-0)) = \frac{1}{2\pi i}\lim_{T\to\infty}\int_{Re(s)-iT}^{Re(s)+iT}\int_0^\infty \eta(t)t^{s-1}dt\ x^{-s}ds$$

となる。ここで積分の極限は上下対称にとっているのであって、絶対収束するかどうかはわからない。このかたちなら、もとの関数 $\eta(t)t^{Re(s)}$ が C^1 ならば有界変動は自動的だから、可積分なだけで逆変換が保証される。つまり、$\eta(s)$ （を定義する積分）が $\mathrm{Re}(x) = \sigma$ で絶対収束しさえすれば、その σ について積分路を $\sigma \pm iT$ $(T \to \infty)$ に取ることで Mellin 逆変換が成り立つことが確かめられる。実用上は急減少のことが多いので、ここまで必要ないであろう。しかし世の中の本には曖昧な記述も散見されるので、あえて復習しておいた。

さて、もし「関数等式」$\tilde{\eta}(k-s)=(-1)^k\tilde{\eta}(s)$ を仮定すれば逆変換の公式より、

$$\begin{aligned}\eta(t) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\tilde{\eta}(s)t^{-s}ds \\ &= \frac{(-1)^k}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\tilde{\eta}(k-s)t^{-s}ds \\ &= \frac{(-1)^k t^{-k}}{2\pi i}\int_{k-\sigma-i\infty}^{k-\sigma+i\infty}\tilde{\eta}(s)t^{s}ds\end{aligned}$$

である。最後の式で積分範囲の $k-\sigma$ を σ に置き換えたいが、これは無条件で可能なわけではない。応用上は $\eta(s)$ は $\mathrm{Re}(s)$ が十分大で収束し、「関数等式」より $\mathrm{Re}(s)$ が十分 0 より小さくても収束する。この途中は何らの仮定が必要だが、たとえば間でもずっと正則でしかも $Im(s)\to\pm\infty$ で $\tilde{\eta}(s)$ が $\mathrm{Re}(s)$ について一様に 0 に収束すれば、垂直帯状領域でコーシーの積分定理を使うことにより積分範囲が変更できる。これにより $\eta(t^{-1})=(-1)^k t^k\eta(t)$ が得られる。これが「関数等式」から「変換法則」を得るための仕掛けである。(この最後の条件の成立を保証するために、任意の垂直帯状領域での正則性と有界性を仮定し、Phragmén-Lindelöf の定理を使うのが普通である。このあたりは一般論ではなくて、具体的な関数の問題と考えたほうが安全ではないかと思う。)

さて、今は $F(-Z^{-1})=F(Z)\det(Z)^k$ を言いたいのであるが、$F(Z)$ は正則なことがわかるので、関係式は $Z=iY$ $(Y\in\mathcal{P}_2)$ だけで確かめればよい。$t=\det(Y)$ とおけば、$Y=t^{1/2}W,\ W\in\mathcal{PS}_2$ であり、$\mathcal{P}_2$ 上の関数は $\mathcal{P}_2\ni Y\to(t^{1/2},t^{-1/2}Y)\in R^+\times\mathcal{PS}_2$ により、$R^+\times\mathcal{PS}_2$ 上の関数と思える。さてここで $f_t(W)=F(iY)$ とおき、t に関して Mellin 変換を取って $\tilde{f}_s(W)$ と書こう。ここで示したいのは、$f_{t^{-1}}(W^{-1})=(-1)^k t^k f_t(W)$ なのだが、$n=2$ の特殊性からまったく偶然にも

$$J=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$$

とおけば $W^{-1}=JWJ^{-1}$ となり、$A(T)$ の $GL_2(\mathbb{Z})$ 不変性より $f_{t^{-1}}(W)=f_{t^{-1}}(W^{-1})$ となってしまう。よって

$$\tilde{f}_{k-s}(W)=(-1)^k\tilde{f}_s(W)$$

を示せば良いことになる。(なお $n\geq 3$ なら、以上のような偶然はもちろんもうあり得ない。このときは関数等式の一方の量指標を $\hat{u}(Y)=u(Y^{-1})$ に置き換えるべきなのである。もともとこのほうが普通なのであって、Koecher-Maass 級数の関数等式も元々そうなっているし、Weissauer の逆定理の拡張 [45] でもそうなっているはずだと思う。) さて、$A(T)$ の増大度条件から、$\mathrm{Re}(s)$ が十分大なら、

$$\tilde{f}_s(W)\in L^2(SL_2(\mathbb{Z})\backslash H_1)$$

がわかるので、スペクトル分解を使えば、次節の $(\tilde{f}_s(W),\phi)$ の公式も考慮に入れて、Mellin 逆変換を形式的に使用すれば逆定理は直ちに出る。parity がそろっているのは、単にそろわないところの内積は消えるからに他ならない。ガンマ因子については後で述べる。

なお Mellin 逆変換の積分路の変更ができるための条件として、垂直帯状領域での正則性と有界性が使われる。実は [15] では $\tilde{f}_s(W)$ 自身に（W と無関係な）有界性と正則性を仮定している。これから Mellin 逆変換が出ることは (Phragmén-Lindelöf などで）標準的である。一方 Duke-Imamoḡlu では、スペクトル分解における「係数」（ディリクレ級数になる各内積）の正則性と有界性しか仮定していない。この点の差異について [7] に何の解説も無いのは少々奇異に感ぜられる。筆者には自明のことには思われない。以下これの証明を試みたい。（以下の証明で正しいと思うが、直接利用したい方は再度検討されたい。）

$$W = \begin{pmatrix} y^{-1} & -y^{-1}x \\ -y^{-1}x & y^{-1}(x^2+y^2) \end{pmatrix}$$

として、$t = \det(Y)$, $Y = t^{1/2}W$ として

$$\begin{aligned}
\Delta_0(e^{-2\pi t^{1/2}Tr(TW)}) &= (-2\pi Tr(TY) + (2\pi)^2(Tr((TY)^2) - 2t\det(T))e^{-2\pi Tr(TY)} \\
\Delta_0^2(e^{-2\pi t^{1/2}Tr(TW)}) &= ((-2\pi Tr(TY) + (2\pi)^2(Tr((TY)^2) - 2t\det(T))^2 + 10Tr((TY)^2) \\
&\quad +4Tr(TY) - 4t\det(T) + 4(Tr(TY))^3 - 16t\det(T)Tr(TY))(e^{-2\pi Tr(TY)})
\end{aligned}$$

となる (計算は Maple で実行した。）もちろん $\Delta_0^\nu f_s(W)$ も $SL_2(\mathbb{Z})$ 不変である。もともと $Re(s)$ が十分大で $\tilde{f}_s(W)$ は L^2 の元だったが、([15])、その議論をまねれば、同様に次がでるであろう。

「$\Delta_0^\nu(\tilde{f}_s(W))$ $(\nu = 1, 2)$ も L^2 の元であり、 $Re(s)$ が十分大で $\Delta_0^2(\tilde{f}_s(W))$ は W にも s にもよらずに有界。」

実際 $Tr((TY)^2) \le Tr(TY)^2$, また、$m > 0$ にたいし $Tr(TY)^m e^{-Tr(TY)}$ はどうにでも評価できるので、$\Delta_0^2 f_t(W)$ については定数倍の調整を除いて $f_t(W)$ とまったく同じ評価が成り立つし、これの Mellin 変換についても同様である。Mellin 変換の積分記号下で微分して $\Delta_0^2(f_s(W))$ についても同様。

$\Delta_0 f_s \in L^2$ より、スペクトル分解は関数としての絶対かつ一様な収束になる。しかしわれわれは Mellin 逆変換を項別に実行したいので、s に関して一様収束することをみたい。スペクトル固有関数なるカスプ形式 u_n $(n = 1, 2, \ldots)$ に対して、Δ_0 の固有値を $-\lambda_n$ と書くことにすると、$\lambda_n > 1/4$ で

$$(\tilde{f}_s, u_n) = -\lambda_n^{-1}(\tilde{f}_s, \Delta_0(u_n)) = -\lambda_n^{-1}(\Delta_0\tilde{f}_s, u_n) = \lambda_n^{-2}(\Delta_0^2\tilde{f}_s, u_n)$$

より、相加相乗平均とシュワルツのレンマを使うと

$$|(\tilde{f}(s), u_n)u_n(z)| \le \frac{1}{2}\left(\frac{|u_n(z)|^2}{\lambda_n^2} + \frac{|(\Delta_0^2(\tilde{f}_s), u_n)|^2}{\lambda_n^2}\right) \le \frac{1}{2}\left(\frac{|u_n(z)|^2}{\lambda_n^2} + \frac{||\Delta_0^2(\tilde{f}_s)||^2}{\lambda_n^2}\right)$$

ただし、$||*||$ は L^2 ノルムである。和をとって、$\sum_{n=1}^\infty |\frac{u_n(W)}{\lambda_n}|^2$ と $\sum_{n=1}^\infty \lambda_n^{-2}$ はいずれも有限である。（cf. [34] II p. 274-275.）$Re(s)$ 十分大のところで $||\Delta_0^2\tilde{f}_s||$ が一様有界になるの

で、$Re(s)$ が十分大では、s の関数としてスペクトル分解は一様収束している。よって、s について項別積分してかまわない。ということは

$$\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}(\tilde{f}_s,\phi)t^{-s}ds$$

（ϕ はスペクトル固有関数）を個別に計算すれば良いと言うことになる。ここで、$(\tilde{f}_s,\phi)$ が全平面で正則で、各垂直帯状領域で有界とし、関数等式 $(\tilde{f}_{k-s},\phi)=(-1)^k(\tilde{f}_s,\phi)$ を満たすなら、この関数は $t\to t^{-1}$ で $(-1)^k t^k$ 倍となり、もとの $F(iY)$ が望みの変換法則を満たすことになる。（以上で、[15] の条件との直接的な比較は行っていない。）

7.4 Koecher-Maass 級数とガンマ因子

この節では $(\tilde{f}_s,\phi)$ が実は Koecher-Maass タイプの級数であることをいい、ガンマ因子の計算を量指標のそれに帰着する方法を述べる。$t=\det(Y)$ とおけば、前に述べたように $\mathcal{P}_2$ 上の関数 $F(iY)$ は $(t^{1/2},t^{-1/2}Y)\in R^+\times\mathcal{PS}_2$ の関数と見なせた。$(t,W)\in R^+\times S_2$ に対し $f_t(W)=F(it^{-1/2}W)$ とおき t に関する Mellin 変換を前と同様 $\tilde{f}_s(W)$ とかく。

$$\tilde{f}_s(W)=\int_0^\infty f_t(W)t^{s-1}dt=\int_0^\infty f(Y)\det(Y)^{s-1}dt.$$

また、 $\mathcal{P}_2$ 上の量指標 $u(Y)$ をとれば、H_1 での内積は、

$$(\tilde{f}_s,u)=\int_{SL_2(\mathbb{Z})\backslash H_1}\tilde{f}_s(\iota(z))\overline{u(\iota(z))}\frac{dx\,dy}{y^2}.$$

と定義されるが、前節で述べた不変測度の関係より、これは

$$\int_{SL_2(\mathbb{Z})\backslash\mathcal{P}_2}F(iY)\overline{u(Y)}\det(Y)^{s-3/2}dY.$$

となる。これを $F(Z)$ のフーリエ展開を用いて項別積分し、より具体的な表示を求めたい。このためには $u(Y)$ のフーリエ変換の公式が必要になる。以下これを述べる。内容は Maass [29] によるが、$\mathcal{P}_2$ の結果を H_1 の結果に置き換える部分を補っておく。一般の自然数 n と $Y\in\mathcal{P}_n$ に対し、微分作用素 $M_n(Y)$ を次のように定義する。

$$M_n(Y)=\det(Y)\det(\frac{\partial}{\partial Y}).$$

これは $SL_n(\mathbb{R})$ の作用に関して不変な微分作用素である。作用素として

$$\det(Y)^{-s}M_n(Y^{-1})\det(Y)^s=(-1)^n\det(Y)^{(n-1)/2-s}M_n(Y)\det(Y)^{s-(n-1)/2}$$

となることが知られている。量指標 u と変数 s に対し

$$\det(Y)^{-s}M_n(Y^{-1})\det(Y)^s u(Y)=(-1)^n h(s)u(Y)$$

となる n 次のモニックな多項式 $h(s)$ が存在することがわかっている。方程式 $h(s)=0$ の根を

$$h(s)=\prod_{i=1}^{n}(s-\alpha_i)$$

としておくと $T\in\mathcal{P}_n$ に対し、次の公式が得られる。

$$\int_{\mathcal{P}_n} e^{-2\pi\mathrm{tr}(YT)}u(Y^{-1})\det(Y)^{s-(n+1)/2}dY=\pi^{n(n-1)/4}(2\pi)^{-ns}\prod_{i=1}^{n}\Gamma(s-\alpha_i)\det(T)^{-s}u(T).$$

(証明は [29].) さて、$n=2$ に戻って、 $u(Y)$ が homogeneous of degree 0 のことなどを使うと、計算により

$$\det(Y)^{-s}M_2(Y^{-1})\det(Y)^s(u(Y))=-\frac{1}{4}\Delta_0 u(z_Y)+s(s-\frac{1}{2})u(z_Y)$$

がわかる。ただし z_Y は以前述べたように $\mathcal{P}_2\to\mathcal{PS}_2\cong H_1$ で対応する H_1 の元である。よって、もし $\Delta_0\phi(z)=-\lambda\phi(z)$, ならば $h(s)=0$ の根は

$$\alpha_i=\frac{1\pm\sqrt{1-4\lambda}}{2}.$$

で与えられる。さて、次数 n、重さ k （偶数とする）の $Sp(n,\mathbb{Z})$ に関するジーゲル保型形式 $F(Z)$ と量指標 $u(Y)$ ($Y\in\mathcal{P}_n$) について、フーリエ展開を

$$F(Z)=\sum_{T\geq 0}a(T)e^{2\pi i\mathrm{tr}(TZ)}$$

と書き、

$$L(s.F.u)=\int_{SL_n(\mathbb{Z})\backslash\mathcal{P}_n}F(iY)u(Y^{-1})\det(Y)^{s-(n+1)/2}dY$$

と定義すれば

$$L(s,F,u)=2\times\pi^{n(n-1)/4}(2\pi)^{-s}\prod_{i=1}^{n}\Gamma(s-\alpha_i)\sum_{T\in L^+/SL_n(\mathbb{Z})}\frac{a(T)u(T)}{\det(T)^s|Aut(T)|}$$

となることが容易にわかる。これは F の (量指標 u つきの) Koecher Maass 級数 と呼ばれ、

$$L(k-s,F,u)=(-1)^{kn/2}L(s,F,\hat{u})$$

を満たす。ただし $\hat{u}(Y)=u(Y^{-1})$ である。特に $n=2$ ならば $\hat{u}=u$ になる。ここに現れるガンマ因子などと関数等式が、逆定理ですべき仮定と言うことになる。

8 最初の出発点

以上で長い序章がやっと終わり、証明にとりかかれる準備ができた。どのようなディリクレ級数を取り扱おうとしているのか、最初の出発点を書き下してみる。

Lemma 5 k を偶数として、$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c(n)e^{2\pi inz} \in S^+_{k-1/2}(\Gamma_0(4))$ とする。ここで

$$A(T) = \sum_{d|e(T)} d^{k-1}c(\frac{\det(2T)}{d^2})$$

とおき、*Maass wave form* $\phi(z)$ *(of weight 0)* に対し

$$\Psi(s,\phi) = \sum_{T\in L^+/SL_2(Z)} \frac{A(T)\phi(z_T)}{\det(T)^{s+(k-1)/2}|Aut(T)|}$$

とおくと

$$\Psi(s,\phi) = 2^{2s+k-1}\zeta(2s)\sum_{n=1}^{\infty} c(n)b_0(-n)n^{-s-k/2+5/4}$$

となる。ただしここで $\zeta(s)$ は普通のリーマンゼータ関数であり、また任意の自然数 n にたいして

$$b_0(-n) = n^{-3/4}\sum_{T\in L^+/SL_2(\mathbb{Z}),\det(2T)=n} \frac{\phi(z_T)}{|Aut(T)|}, \qquad z_T = \frac{-b+\sqrt{-\det(2T)}}{2a}$$

とおいた。（ここで T は原始的なものだけ取っているわけではない点は注意されたい。）

証明 : 簡単だが出発点であるから証明を書いておく。$T = eT_0$ (T_0 原始的) とかく。あきらかに $\phi(z_T) = \phi(z_{T_0})$, $Aut(T) = Aut(T_0)$ であるから、L^+_{prim} で原始的な正定値半整数対称行列の集合を表すと

$$\Psi(s,\phi) = \sum_{T_0\in L^+_{prim}} \frac{\phi(z_{T_0})}{|Aut(T_0)|}\sum_{e=1}^{\infty}\frac{A(eT_0)}{\det(eT_0)^{s+(k-1)/2}}$$

であり、また

$$\begin{aligned}
\sum_{e=1}^{\infty}\frac{A(eT_0)}{\det(eT_0)^s} &= \sum_{e=1}^{\infty}\frac{1}{e^{2s}\det(T_0)^s}\sum_{d|e} d^{k-1}c(\frac{e^2\det(2T_0)}{d^2}) \\
&= \sum_{d,m=1}^{\infty}\frac{c(m^2\det(2T_0))}{d^{2s-k+1}m^{2s}\det(T_0)^s} \\
&= \zeta(2s-k+1)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{c(m^2\det(2T_0))}{m^{2s}\det(T_0)^{2s}}
\end{aligned}$$

前の式とまとめて

$$\begin{aligned}\sum_{T_0\in L^+_{prim}/SL_2(\mathbb{Z})}\frac{\phi(z_{T_0})}{|Aut(T_0)|}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{c(m^2\det(2T_0))}{\det(mT_0)^s} &= \sum_{T_0\in L^+_{prim}/SL_2(\mathbb{Z})}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\phi(z_{mT_0})}{|Aut(mT_0)|}\frac{c(\det(2mT_0))}{\det(mT_0)^s}\\ &= \sum_{T\in L^+/SL_2(\mathbb{Z})}\frac{\phi(z_T)}{|Aut(T)|}c(\det(2T))\det(T)^s.\end{aligned}$$

ここで、$\det(2T)=n$ のところでまとめれば

$$\sum_{T\in L^+/SL_2(\mathbb{Z}),\det(2T)=n}\frac{\phi(z_T)}{|Aut(T)|}\frac{c(n)}{n^s}2^{-2s}=2^{-2s}n^{3/4}b_0(-n)c(n)n^{-s}$$

より

$$\Psi(s-(k-1)/2,\phi)=2^{-2s}\zeta(2s-k+1)\sum_{n=1}^{\infty}n^{3/4}c(n)b_0(-n)n^{-s}$$

となる。証明終わり。

注意：以上で原論文の $b(n)$ という記号をあえて $b_0(n)$ という記号に変えた理由は、実は原論文に少しミスプリントがあるためである。[7] では $b(n)$ の定義が結果的に混乱している。混乱のもとは、重さ 1/2 の保型形式の定義で $y^{1/4}$ をつけるかつけないかという点にある。彼らの [7] の p. 350 の下から 8 行目の $B(n,y)$ の表示は $(4\pi y|n|)^{-1/4}$ を削除しないとそれまでの記述にあわなくなっている。しかし、ここを削除すると彼らの $b(n)$ の定義が他の部分と整合しなくなる。よって、$B(n,y)$ の表示を正しく訂正したものを $b_0(n)$ と書いてかれらの意識にある $b(n)$ との混乱を避けることにした。この結果、彼らの論文の Lemma 3 と上の補題は見かけが多少異なっている。

9 実解析的保型形式の志村対応

前節で考えたディリクレ級数 $\Psi(s,\phi)$ は一見 convolution product のように見えるが $b_0(-n)$ は ϕ から勝手に定義しただけであるから、このままでは何のことかわからない。この節では、 $b_0(-n)$ が保型形式のフーリエ係数として解釈できることをいい、$\Psi(s,\phi)$ が本当に保型形式に付随するディリクレ級数の convolution product であることをいう。

複素数 r に対し、次の 3 つの条件を満たす H_1 上の関数 $g(z)$ の空間を T^+_r と書く。 。

1. g は C^∞ 級関数で、任意の $\gamma=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\Gamma_0(4)$ に対して

   $$g(\gamma z)=g(z)(\theta(\gamma z)/\theta(z))|cz+d|^{-1/2}$$

   となり、各カスプでの増大度が高々多項式 order である。ここで前に定義したように $\theta(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}e^{2\pi i n^2 z}$ としている。

2. 条件（１）によって $g(z)$ は

$$g(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} B(n,y)e^{2\pi inx}$$

とフーリエ展開されるが、さらに任意の負の整数 n に対して z と無関係のある数 $b(n)$ が存在して

$$B(n,y) = b(n)W_{-1/4,(ir)/2}(4\pi y|n|)$$

となる。ここで $W_{\alpha,\beta}$ は Whittaker 関数である。（記号は付録参照。）

3. 正または負の整数 n について、$n \equiv 2,3 \bmod 4$ ならば $B(n,y) = 0$ となる。

注意：前節で注意したように、上の条件（２）は原論文のミスプリントを訂正してある。原論文の $b(-n)$ は $b_0(-n)(4\pi n)^{1/4}$ のことだと思えば、原論文で $b(-n)$ が現れる他の部分の記述とおおむねつじつまがあう。

Theorem 3 (Katok-Sarnak, Duke-Imamoḡlu) *$\phi(z)$ を H_1 上の重さ 0 の $SL_2(\mathbb{Z})$ に関する Maass wave form でスペクトル固有関数になるものとし、*

$$\Delta_0\phi = -(\frac{1}{4}+r^2)\phi$$

とする（r は適当な複素数。）さらに ϕ は even, つまり $\phi(-\overline{z}) = \phi(z)$ とする。するとある $g(z) \in T_r^+$ が存在して

$$b_0(-n) = n^{-3/4} \sum_{T\in L^+/SL_2(\mathbb{Z}),\det(2T)=n} \phi(z_T)|Aut(T)|^{-1}$$

となる。

ここで g は、$\Gamma_0(4)$ の作用に関しては保型的な条件をみたしているわけだが、 $\Delta_{1/2}$ の固有関数とは限らないので、いわゆる Maass form とは限らない。従って普通の用語法では保型形式とは呼ばないであろう。さて、この定理は、 ϕ がカスプ形式の時は Katok-Sarnak による。証明法は [38] にきわめて近い。ϕ の Δ_0 による固有値を $1/4+r^2$ とするとき、対応する $g \in T_r^+$ の $\Delta_{1/2}$ による固有値は $1/4+r^2/4$ になっている。これらについては、ここでふれる余裕はないので [18] を参照されたい。定数関数と $E(z,1/2+ir)$ のときは、Duke-Imamoḡlu が（既知のフーリエ展開などを用いて）今回確かめている。とくにアイゼンシュタイン級数の時は Katok-Sarnak [18] でも、p.194-195 で注意されている。（ただし p.194 の (0.2) は右辺を $2^{-s}|d|^{s/2}$ 倍しておく必要があるだろう。）このあたりも原論文の記述は簡略なので少し解説してみよう。まず $\phi(z) = E(z,1/2+ir)$ とする。複素数 $\sigma \in \mathbb{C}$ と (正または負の）奇数 k に対して H_1 の上の $\Gamma_0(4)$ に関する、重さ $-k/2$ のアイゼンシュタイン級数 $E(k,\sigma,z)$ と $E^*(k,\sigma,z)$ を次のように定義する。

$$E(k,\sigma,z) = y^{\frac{\sigma}{2}} \sum_{d=1,\ odd}^{\infty} \sum_{c=-\infty}^{\infty} \left(\frac{4c}{d}\right) \epsilon_d^{-k}(4cz+d)^{\frac{k}{2}}|4cz+d|^{-\sigma},$$

（ここで $\left(\frac{*}{*}\right)$ は Shimura [36] p.442 で定義された平方剰余記号、$\epsilon_d = 1$, or i, if $d \equiv 1$, or $3 \bmod 4$ である。）$-k+2\sigma-4>0$ の範囲ではこの級数は絶対かつ一様に収束する。さらに

$$\begin{aligned} E^*(k,\sigma,z) &= E(-\frac{1}{4z})(-2iz)^{\frac{k}{2}} \\ &= y^{\frac{\sigma}{2}} 2^{\frac{k}{2}-\sigma} e(-\frac{k}{8}) \sum_{d=1,\ odd}^{\infty} \sum_{b=-\infty}^{\infty} \left(\frac{-b}{d}\right) \epsilon_d^{-k} (dz+b)^{\frac{k}{2}} |dz+b|^{-\sigma}. \end{aligned}$$

とおく。これらの 1 次結合

$$F(k,\sigma,z) = E(k,\sigma,z) + 2^{k/2-\sigma}(e(k/8)+e(-k/8))E^*(k,\sigma,z).$$

をとる。このような線形結合は（$\sigma=0$ のときに）Cohen [6] が最初にあつかった。このようにとる理由は、フーリエ係数が “plus condition” を満たすようにしたいからである。実際、Shimura [37] の記号にあわせて

$$\begin{aligned} \tau_d(y,\frac{\sigma-k}{2},\frac{\sigma}{2}) &= |d|^{\sigma-k/2-1} e(\frac{k}{8})(2\pi)^{\sigma-k/2}(4\pi|d|y)^{-\sigma/2+k/4} W_{-sgn(d)k/4,\sigma/2-k/4-1/2}(4\pi|d|y) \\ &\times \begin{cases} \frac{1}{\Gamma((\sigma-k)/2)} & \text{if } d>0, \\ \frac{1}{\Gamma(\sigma/2)} & \text{if } d<0. \end{cases} \end{aligned}$$

とおき、フーリエ展開を

$$y^{-\sigma/2}F(k,\sigma,z) = 1 + \sum_{d=-\infty}^{\infty} C(d,\sigma,k)e(dx)\tau_d(y,\frac{\sigma-k}{2},\frac{\sigma}{2}),$$

（各 $C(d,\sigma,k)$ は z によらない定数）と書くと $(-1)^{(k+1)/2}d \equiv 2,3 \bmod 4$ ならば $C(d,\sigma,k)=0$ となる。残りの係数については、2 次体 K または $K=\mathbb{Q}\oplus\mathbb{Q}$ に対し d_K で基本判別式、または $d_K=1$ を表すとすると次を得る。

Proposition 1

$$\sum_{f=1}^{\infty} e(\frac{k}{8})C((-1)^{(k+1)/2}d_K f^2,\sigma,k)(|d_K|f^2)^{\sigma-k/2-1-s} =$$

$$(-1)^{(k^2-1)/8}2^{k-2\sigma+3/2}\frac{|d_K|^{\sigma-k/2-1}}{|d_K|^s} \times \frac{L(\sigma-(k+1)/2,\chi_K)\zeta(2s)\zeta(2s-2\sigma+k+2)}{\zeta(2\sigma-k-1)L(2s-\sigma+(k+3)/2,\chi_K)}.$$

ここで χ_K は K に付随する *Kroneker* 指標、ただし $d_K=1$ ならば単位指標とする。

証明は [10] または [14] Proposition 2.2 を参照。特に $\sigma = s$、かつ $k = -1$ とおくと $d < 0$ に対し

$$\tau_d(y, \frac{s+1}{2}, \frac{s}{2}) = y^{-s/2-1/4} \frac{|d|^{-3/4+s/2}\pi^{1/4}e(-1/8)}{\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)} W_{-1/4,s/2-1/4}(4\pi|d|y).$$

となる。さて $\Lambda(s) = \pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s)$ とおき、

$$g(z,s) = y^{1/4}2^s\Lambda(s)F(-1,s,z),$$

と書く。この関数のフーリエ展開 $g(z,s) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} B(n,y)e(nx)$ において、負の整数 $n < 0$ について $B(n,y) = b_0(n)W_{-1/4,s/2-1/4}(4\pi|n|y)$ と書くと

$$b_0(d) = |d|^{-3/4+s/2}\pi^{1/4}e(-1/8)C(d,s,-1)2^s\zeta(s).$$

となる。特に虚 2 次体 K に対しては、

$$\begin{aligned} \sum_{f=1}^{\infty} |d_K f^2|^{3/4} b_0(d_K f^2) f^{s-2t} &= (4\pi)^{1/4} \frac{|d_K|^{s/2}}{2^s} \frac{\zeta(s)L(s,\chi_K)}{\zeta(2s)} \\ &\quad \times \frac{\zeta(2t+s-1)\zeta(2t-s)}{L(2t,\chi_K)}. \end{aligned}$$

がわかる。これより $\phi(z) = E(z, \frac{1}{2}+ir)$ については定数倍 ($2(4\pi)^{-1/4}$ 倍) を除き $g(z, \frac{1}{2}+ir)$ が定理の題意を満たすことがわかる。これを一応示しておこう。正確にやるには、収束する s で証明しておいて解析接続するので、一般の s で「平均値」をみる。この部分は実は Zagier [48], Hirzebruch-Zagier [13] 等の結果が利用できる。K を虚 2 次体とし、判別式を d_K とする。$n = |d_K|f^2$ として、$\det(2T) = n$ なる $T \in L^+$ を考える。z_T をアイゼンシュタイン級数に代入したものを計算しよう。

$$E(z,s) = \frac{1}{2} \sum_{\gamma\in\Gamma_\infty\backslash SL_2(\mathbb{Z})} \mathrm{Im}(\gamma z) = \frac{1}{2}\zeta(2s) \sideset{}{'}\sum_{(u,v)\in\mathbb{Z}^2} \frac{y^s}{|uz+v|^{2s}}$$

と変形しておく。ただし $\sum'$ はゼロベクトルを除くことを意味する。

$$T = \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}$$

に対して、

$$\frac{\mathrm{Im}(z_T)^s}{|uz_T+v|^{2s}} = \frac{|d_K|^{s/2}f^s}{2^s} \times \frac{1}{(av^2 - bvu + cv^2)^s}$$

であるから、

$$\zeta(2s) \times \sum_{T\in L^+/SL_2(\mathbb{Z}),\det(2T)=n} \frac{E(z_T,s)}{|Aut(T)|} = \frac{1}{2}\zeta(s,n)$$

である。ただし、ここで $\zeta(s,n)$ は、Zagier [48] p. 109 の（６）におけるディリクレ級数であって、

$$\zeta(s,n)=\sum_{T\in L^+/SL_2(Z),\det(2T)=n}\sum_{w\in\mathbb{Z}^2}{}'\frac{1}{|Aut(2T)|({}^twTw)^s}$$

と定義される。（定義の見かけが [48] と異なっているが、$Aut(T)$ が $\mathbb{Z}^2-\{(0,0)\}$ に faithful に作用していることに注意すれば同じ定義であることはあきらか。）ここで、T は原始的とは仮定していない。このゼータ関数を２次体の（極大と限らぬ）整数環のイデアル論で計算するには、導手と素でないイデアルのところで素イデアル分解の一意性が成り立たないので、かなり注意が必要である。（S. Lang [25] の p.91 Corollary 2 は間違いである。この事実は前に金子昌信氏より教わった。なお、原始的２次形式と、２次体の極大とは限らぬ整数環のイデアルの間の関係は古典的で、専門家は誰でも知っているのに（つまり専門家は誰でも一度は自分で考えたことがあるのに）、詳しく解説した文献が非常に少ない。そのため時として知識のない非専門家が Gauss の解説と称して生半可な解説を書いたりすることもあるようだが、文献を選ぶ際には注意が必要であろう。正確な文献のひとつとして、Andrianov [3] の Appendix 3 をあげておく。）この方向の計算について、Kaneko [17] より少しだけ解説しておく。２次体 K を固定し、O_f を導手 f の K の整数環とする。O_f の proper ideal $\mathfrak{a}$ に対して、$N(\mathfrak{a})=(O_f:\mathfrak{a})$ とおき、

$$\zeta_{O_f}(s)=\sum_{\mathfrak{a}:proper}\frac{1}{N(\mathfrak{a})^s}$$

と定義すると、[17] により

$$\zeta_{O_f}(s)=\zeta_K(s)\prod_{p|f}\frac{(1-p^{-s})(1-\chi_K(p)p^{-s})-p^{m-1-2ms}(1-p^{1-s})(\chi_K(p)-p^{1-s})}{1-p^{1-2s}}$$

となる。ただし、$\zeta_K(s)$ は K のデデキントゼータ関数であり、また $m=ord_p(f)$ (f を割り切る最大の p のべき）とした。われわれの求めるべき「平均値」について、$n=|d_K|f^2$ のときの、次の関係式

$$\zeta(s,n)=\sum_{d|f}e^{-s}\zeta_{O_{f/e}}(s)$$

を用いてもよいが、実は Kaneko [17] よりはやく、Zagier により $\zeta(s,n)$ は直接計算されており、結果は

$$\zeta(s,n)=\zeta_K(s)\sum_{d|f}\mu(d)\chi_K(d)d^{-s}\sigma_{1-2s}(f/d)$$

である（[13], [48] p. 130 Proposition 3(iii)。）言い換えると

$$\sum_{f=1}^{\infty}\zeta(s,|d_K|f^2)f^{-t}=\zeta(s)L(s,\chi_K)\frac{\zeta(2s+t-1)\zeta(t)}{L(s+t,\chi_K)}$$

である。もとにもどって

$$\begin{aligned}\sum_{f=1}^{\infty}\sum_{T\in L^+/SL_2(\mathbb{Z}),\det(2T)=|d_K|f^2}\frac{E(z_T,s)}{|Aut(T)|}f^{-2t} &= \frac{1}{2}\sum_{f=1}^{\infty}\frac{|d_K|^{s/2}f^s}{2^s}\frac{\zeta(s,|d_K|f^2)}{\zeta(2s)}f^{-2t}\\ &= \frac{1}{2}\frac{|d_K|^s}{2^s}\frac{\zeta(s)L(s.\chi_K)}{\zeta(2s)}\frac{\zeta(2t+s-1)\zeta(2t-s)}{L(2t,\chi_K)}\end{aligned}$$

である。よって前の $g(z,s)$ の係数と比較して、$b_0(d)$ と「平均値」の関係を得る。さて、最後に定数関数であるが、これはなかなか興味深い。ϕ が定数なら ϕ の $\det(2T)=n$ での平均値はおおざっぱにいえば判別式 n の整数環の類数である（実際は原始的なものだけ取っているわけではないから、すこし違うが。）対応するディリクレ級数は概均質ベクトル空間のゼータ関数の 1 種である。これをアイゼンシュタイン級数からきていると思う思い方は本当はいろいろあり得る（cf. [14]。）今の目的に適合させるために、$g(z,s)$ で $s=1$ にしたいのだが $g(z,s)$ は $s=1$ で 1 位の極をもっている。ここを取り除いて

$$g(z)=\sqrt{\frac{\pi}{3}}\lim_{s\to 1}(\frac{g(z,s)}{\Lambda(s)}-\frac{3}{\pi}\frac{y^{1/4}\theta(z)}{s-1})$$

とおくと、定数倍を除けば、これが求めるものになっている。（留数の計算では、$W_{1/4,1/4}(y)=y^{1/4}e^{-y/2}$ などに注意。付録参照。）$\theta(z)$ と $g(z,s)$ は同じ変換公式を満たすので、$g(z)$ も同じ保型性を持っている。カスプでの増大度の条件は作り方から明らかである。このあたりの計算は [14] にかなり近いので参考にされたい。もちろん Cohen [6], Zagier [48] などとの関連は言うまでもない。

10 散乱行列

証明の論理的な筋道からややはずれるが、次の節で利用するので、実解析的アイゼンシュタイン級数の関数等式について述べる。これはよく知られているし、また計算も容易である ([21] など。）ここでは $\Gamma_0(4)$ について計算を実行しておく。群 $\Gamma_0(4)$ にはカスプが 3 つあり、$i\infty$, $0=\sigma_0(i\infty)$, $1/2=\sigma_{1/2}(i\infty)$ で代表される。ただし

$$\sigma_0=\begin{pmatrix}0 & -1/2\\ 2 & 0\end{pmatrix},\qquad \sigma_{1/2}=\begin{pmatrix}1 & -1/2\\ 2 & 0\end{pmatrix}$$

とした。 $i\infty$、0, 1/2 に対応するアイゼンシュタイン級数をそれぞれ

$$\begin{aligned}E_\infty(z,s) &= \frac{1}{2}\sum_{\gamma\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma_0(4)}\mathrm{Im}(\gamma z)^s\\ E_0(z,s) &= E_\infty(\sigma_0^{-1}(z),s),\\ E_{1/2}(z,s) &= E_\infty(\sigma_{1/2}^{-1}(z),s)\end{aligned}$$

で定義する。$\kappa = i\infty$, 0, or 1/2 に対し $\sigma(i\infty) = \kappa$ なる σ を取ると $E_\infty(\sigma(z), s)$ のフーリエ展開の定数項は $\delta_{\kappa,i\infty} y^s + \alpha_\kappa(s) y^{1-s}$ と書ける。(δ は Kronecker のデルタ。）ここで

$$\alpha_\kappa(s) = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(s-1/2)}{\Gamma(s)} \beta_\kappa(s),$$

ただし

$$\beta_\kappa(s) = \sum_{c>0} \frac{1}{|c|^{2s}} \times |\{d \bmod c\}|$$

となる。ここで和はある (a,b) について $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(4)\sigma$ となるような (c,d) をわたる。実際に計算すると

$$\begin{aligned} \beta_\infty(s) &= \sum_{c=1}^{\infty} \phi(4c)(4c)^{-2s} = \frac{\zeta(2s-1)}{\zeta(2s)} \times \frac{2^{1-4s}}{1-2^{-2s}} \\ \beta_0(s) &= \beta_{1/2}(s) = 2^{-2s} \sum_{c=1,odd}^{\infty} \phi(c) c^{-2s} = \frac{\zeta(2s-1)}{\zeta(2s)} \times \frac{2^{-2s}(1-2^{1-2s})}{1-2^{-2s}} \end{aligned}$$

である。ここで ϕ はオイラー関数。一般論より (cf. Kubota [21]), 次の関数等式を得る。

$$E_\infty(z,s) = \alpha_1(s) E_\infty(z, 1-s) + \alpha_2(s) E_0(z, 1-s) + \alpha_3(s) E_{1/2}(z, 1-s).$$

前に解説した微分作用素 L_l を何度か繰り返して、重さ $-k$ のアイゼンシュタイン級数の関数等式もえられる。すなわち、正の偶数 k に対し

$$\tilde{E}_\infty(z,s) = (4\pi)^{k/2-1} \Gamma(s+k/2) \pi^{-s} \zeta(2s) E_\infty^{-k}(s,z)$$

と (あとの都合でガンマ因子と定数をつけて）定義し、同様に他のカスプでも

$$\begin{aligned} \tilde{E}_0(z,s) &= (-z/|z|)^k \tilde{E}_\infty(\sigma_2^{-1} z, s), \\ \tilde{E}_{1/2}(z,s) &= ((-2z+1)/|-2z+1|)^k \tilde{E}_\infty(\sigma_2^{-1} z, s). \end{aligned}$$

とおく。 すると

Lemma 6

$$\tilde{E}_\infty(z, 1-s) = \frac{2^{4s-3}}{1-2^{2s-2}} \tilde{E}_\infty(z,s) + \frac{2^{2s-2}(1-2^{2s-1})}{1-2^{2s-2}} (\tilde{E}_0(z,s) + \tilde{E}_{1/2}(z,s)).$$

となる。証明は、$k=0$ の場合の関数等式の両辺に $L_{-k+2} L_{-k+4} \cdots L_0$ を作用させればよい。

11 Rankin-Selberg convolution

保型性を満たす関数のフーリエ係数から決まるディリクレ級数の convolution product について、アイゼンシュタイン級数との convolution で記述するのは標準的なテクニックである。$f \in S^+_{k-1/2}(\Gamma_0(4))$ と、スペクトル固有関数 ϕ に対応する $g \in T^+_r$ をとって

$$\Lambda_\infty(s,f,g) = \pi^{-2s}\Gamma(s+k/2-3/4+ir/2)\Gamma(s+k/2-3/4-ir/2)\zeta(2s)\Phi_\infty(s),$$

とおく。ここで

$$\Phi_\infty(s) = \sum_{n=1}^\infty c(n)b_0(n)n^{-s-k/2+5/4}$$

とした。 Λ_∞ は $Re(s)$ 十分大で次のような積分表示をもつ。

$$\Lambda_\infty(s,f,g) = 2^{2s}(4\pi)^{-1/4}\int_{\Gamma_0(4)\backslash H_1} y^{k/2-1/4}f(z)g(z)\tilde{E}_\infty(z,s)\frac{dx\,dy}{y^2}.$$

この証明は次のような標準的な unfolding による。まず被積分関数は明らかに $z \to \gamma z$ $(\gamma \in \Gamma_0(4))$ で不変でなので積分は矛盾無く定義される。さらには被積分関数は

$$\sum_{\gamma\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma_0(4)} Im(\gamma z)^{s+k/2-1/4}f(\gamma z)g(\gamma z).$$

でもある。よって、積分領域を $\Gamma_\infty\backslash H_1$ に取り直して計算できる。 Γ_∞ の基本領域は $\{(x,y); 0 \le x \le 1,\ y>0\}$ なので

$$\begin{aligned}
&\int_{\Gamma_0(4)\backslash H_1} y^{k/2-1/4}f(z)g(z)E^{-k}_\infty(z,s)\frac{dx\,dy}{y^2}.\\
=\ &\int_0^\infty\int_0^1 y^{s+k/2-1/4}\sum_{n,m=1}^\infty c(n)b_0(m)e^{-2\pi ny}e^{2\pi(n+m)ix}W_{-1/4,ir/2}(4\pi|m|y)\frac{dx\,dy}{y^2}.\\
=\ &(4\pi)^{-s-k/2+5/4}(\sum_{n=1}^\infty c(n)b_0(-n)n^{-s-k/2+5/4})\int_0^\infty y^{s+k/2-5/4}e^{-y/2}W_{-1/4,ir/2}(y)\frac{dy}{y}.
\end{aligned}$$

となるのである。最後の積分は、ガンマ関数でかける。実際、この積分は

$$\frac{\Gamma(s+\frac{k}{2}+\frac{ir}{2}-\frac{3}{4})}{\Gamma(\frac{ir}{2}+\frac{3}{4})}I(0,-s-\frac{k}{2}+1,\frac{ir}{2}+\frac{3}{4}) = \frac{\Gamma(s+\frac{k}{2}+\frac{ir}{2}-\frac{3}{4})\Gamma(s+\frac{k}{2}-\frac{ir}{2}-\frac{3}{4})}{\Gamma(s+\frac{k}{2})}$$

となる（記号等は付録参照。）よって示された。

この積分表示で s を $1-s$ に置き換えるとどうなるかを計算したい。今、$j=0,1$ に対して

$$\Lambda_{j/2}(s,f,g) = 2(4\pi)^{-1/4}\int_{\Gamma_0(4)\backslash H_1} y^{k/2-1/4}f(z)g(z)\tilde{E}_{j/2}(z,s)\frac{dx\,dy}{y^2}.$$

とおくと、前節で示した $\tilde{E}_\infty(z,s)$ の関数等式から直ちに

$$\Lambda_\infty(1-s,f,g)=\frac{2^{4s-3}}{1-2^{2s-2}}\Lambda_\infty(s,f,g)+\frac{2^{2s-2}(1-2^{2s-1})}{1-2^{2s-2}}(\Lambda_0(s,f,g)+\Lambda_{1/2}(s,f,g))$$

がわかる。ところで、実際に我々が知りたいのは $\Lambda_\infty(1-s,f,g)$ と $\Lambda_\infty(s,f,g)$ の関係であるから $\Lambda_{j/2}(s,f,g)$ の解釈をつけなければならない。しかし、$y^{-2}dxdy$ は不変測度であり、また $\sigma_{j/2}$ ($j=0,\,1$) は $\Gamma_0(4)$ を正規化している（$\Gamma_0(4)$ の $GL_2(\mathbb{Q})$ 内での正規化群の元である）から、z を $\sigma_{j/2}(z)$ に変数変換すれば、$\tilde{E}_{j/2}$ の定義よりあきらかに

$$\Lambda_{j/2}(s,f,g)=2(4\pi)^{-1/4}\int_{\Gamma_0(4)\backslash H_1}\mathrm{Im}(\sigma_{j/2}(z))^{k/2-1/4}f(\sigma_{j/2}(z))g(\sigma_{j/2}(z))\tilde{E}_\infty(z,s)(z/|z|)^{-k}\frac{dx\,dy}{y^2}.$$

となる。実は、$j=0,\,1$ について

$$\Phi_{j/2}(s)=\sum_{n\equiv j \bmod 2}c(n)b_0(n)n^{-s-k/2+5/4},$$

とおけば、次節で示すように

$$\Lambda_{j/2}(s)=(4\pi)^{-1/4}\pi^{-2s}\Gamma(s+k/2-3/4+ir/2)\Gamma(s+k/2-3/4-ir/2)\zeta(2s)\Phi_{j/2}(s).$$

となる。これを認めれば、あきらかに

$$\Lambda_\infty(s,f,g)=\Lambda_0(s,f,g)+\Lambda_{1/2}(s,f,g)$$

となるから、これを前の等式に代入して、$\Lambda_\infty(1-s,f,g)=\Lambda_\infty(s,f,g)$ を得る。

最後に（[7] には何故かなにも説明が書かれていないので）、正則性と有界性について注意しておく。まず、$E^0_\infty(z,s)$ は全平面に有理型に解析接続されている。これはもちろんよく知られていることだが、増大度の条件等を正確に見るために少し復習する。まず、

$$\begin{aligned}E^0(z,s) &= \frac{1}{2}\sum_{\Gamma_\infty\backslash\Gamma_0(4)}\mathrm{Im}(\gamma z)^s\\ &= y^s+\frac{\sqrt{\pi}\Gamma(s-1/2)}{\Gamma(s)}\phi_0(s)y^{1-s}+\sum_{m\neq 0}\pi^s|m|^{s-1}\Gamma(s)^{-1}\phi_m(s)W_{0,s-1/2}(4\pi|m|y)\end{aligned}$$

と展開される。ただし、ここで

$$\phi_m(s)=\sum_{c>0}\frac{1}{|c|^{2s}}(\sum_d(e(\frac{md}{c}))$$

で、和は ($c>0,\ d \bmod c,\ \begin{pmatrix} * & * \\ c & d\end{pmatrix}\in\Gamma_0(4)$) をわたる。また、$e(*)=e^{2\pi ix}$ とした。(Kubota [22] p. 16 参照）両辺に $L=L_{-k+2}L_{-k+4}\cdots L_0$ を作用させると、Whittaker 関数

への作用の公式（付録参照）より、

$$\begin{aligned}L(E^0(z,s)) &= \frac{\Gamma(s+k/2)}{\Gamma(s)}y^s + \frac{\Gamma(1-s+k/2)}{\Gamma(1-s)} \times \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(s-1/2)}{\Gamma(s)}\phi_0(s)y^{1-s} \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Gamma(s+k/2)}{\Gamma(s)} \times \frac{\Gamma(1-s+k/2)}{\Gamma(1-s)}\frac{\pi^s|m|^{s-1}}{\Gamma(s)}\phi_m(s)W_{-k/2,s-1/2}(4\pi my)e^{2\pi imx} \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\pi^s|m|^{s-1}}{\Gamma(s)}\phi_m(s)(-1)^{k/2}W_{k/2,s-1/2}(4\pi my)e^{-2\pi imx}\end{aligned}$$

となる。$\phi_m(s)$ の計算は、たとえば Chinese remainder theorem と円分体論より

$$\mu(c) = \sum_{(d,c)=1, d \bmod c} e(\frac{d}{c})$$

がすぐわかる ($\mu(c)$ は Möbius 関数）が、これを利用すれば容易に求められる。$m \neq 0$ なら $1/\zeta(2s)$ かける初等的な有限項、$m = 0$ ならば前に述べたように $\zeta(2s-1)/\zeta(2s)$ かける初等的な有限項である。せっかくだから、詳しく書いてしまう。ガンマ因子等もかけた上で考えるため $\Lambda(s) = \pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s)$ として

$$\begin{aligned}& (4\pi)^{1-k/2}\tilde{E}_\infty(z,s) \\ =\ & L(\Lambda(2s)E_\infty(z,s)) \\ =\ & \frac{\Gamma(s+k/2)}{\Gamma(s)}\Lambda(2s)y^s + \frac{\Gamma(1-s+k/2)}{\Gamma(1-s)}\Lambda(2-2s)\frac{2^{1-4s}}{1-2^{-2s}}y^{1-s} \\ & + \sum_{m=1}^{\infty}(|m|^{s-1}(\sum_{d|m, d\ odd} d^{1-2s}) \times (\frac{1-2^{(e+1)(1-2s)}}{1-2^{1-2s}} - \frac{1+2^{-2s}}{1-2^{-2s}}) \times \\ & (\frac{\Gamma(s+k/2)\Gamma(1-s+k/2)}{\Gamma(s)\Gamma(1-s)}W_{-k/2,s-1/2}(4\pi my)e^{2\pi imx} + (-1)^{k/2}W_{k/2,s-1/2}(4\pi my)e^{-2\pi imx}))\end{aligned}$$

となる。ただし e は $2^e|m$ となる最大の整数とした。各係数はみな全 s 平面に有理型に解析接続される。$Re(s) \geq 1/2$ では、各フーリエ係数は正則であり、付録の評価に見るごとく Whittaker 関数が $y \to \infty$ で急減少していることより、級数全体としても正則に解析接続される。また、s がコンパクト集合に属するところでは、アイゼンシュタイン級数は s について正則なところ、たとえば $Re(s) \geq 1/2$ では、解析接続した後でも $y \to \infty$ で y^c（c は $Re(s)$ によるある定数） の増大度を持つ。（実際、$y \to \infty$ で Whittaker 関数が急減少なことより、$y \to \infty$ での増大度は定数項のみによる。）よって積分 (Rankin-Selberg convolution) も収束する。より正確に言えば各カスプで展開しておいて、カスプの近傍でカスプごとに評価するわけである。詳しくは煩雑なので略す。なお、各カスプでの展開やアイゼンシュタイン級数の極の一般論などについては [22] p.43 Theorem 4.3.4, 4.3.5 を参照され

たい。特に $Re(s) \geq 1/2$ での極の様子は定数項をみればよいことなど、一般論からわかっている。一方で上記で、もし $Re(s) < 1/2$ ならアイゼンシュタイン級数に極はかなりある。しかしたとえ $\tilde{E}^0_\infty(z,s)$ に極があっても積分値がそこで消えていれば特異点にはならないので、Λ_∞ の極というわけではない。実際、有理型関数として $\Lambda_\infty(1-s,f,g) = \Lambda_\infty(s,f,g)$ だったわけだから、$Re(s) \geq 1/2$ で正則なことより、 $Re(s) \leq 1/2$ でも正則となり、結局整関数になる。（これから逆に $\tilde{E}^k_\infty(z,s)$ の s に関する留数となる z の関数と $f(z)g(z)$ の内積が 0 と結論できる。面白い結論かどうかよくわからないが。）垂直帯状領域での、下記の Phragmén-Lindelöf の定理の仮定を示すのはこれより遙かに面倒である。これは後で示す。

Phragmén-Lindelöf の定理は整数論でよく引用される割に、証明の書かれた文献が少ないように思うので証明付きで述べておく。証明は Lang [24] p. 144 を参考にして少し書き換えたものである。下の条件は（もし整関数なら）いわゆる finite genus の仮定である。（cf. Ahlfors [1] p.192, 207) これはもちろん Hecke の論文などでおなじみである。[25] の仮定はこれより強く、Rudin [35] p.276 の仮定は少なくとも一見これより少し弱い。以下では伝統に従い、複素変数 s に対し、実部と虚部を $s = \sigma + it$ と書くことにする。

Theorem 4 (Phragmén-Lindelöf の定理) $f(s)$ を垂直帯状領域の上部

$$\Omega = \{t \geq t_1 > 0,\ \sigma_0 \leq \sigma \leq \sigma_1\}$$

(t_1*,* σ_0*,* σ_1 は定数）を含む領域で正則とする。さらにこの領域で、ある正の数 α について $f(s) = O(e^{|s|^\alpha})$ *(*$|s| \to \infty$*)* であり、かつ、ある（正とは限らぬ）整数 M があって、境界 $Re(s) = \sigma_0$*,* $Re(s) = \sigma_1$ 上で、$f(s) = O(t^M)$ *(*$t \to \infty$*)* と仮定する。このとき、この領域 Ω 内で $f(s) = O(t^M)$ *(*$t \to \infty$*,* $Re(s)$ について一様*)* となる。

証明：$f(s)$ の代わりに $f(s)/s^M$ を考えると、上で $M = 0$ として証明すればよいことがわかる。($t \geq t_1 > 0$ であるから、これは正則であるし、その他の条件も保存される。）よって、前の条件のかわりに、境界 $\sigma = \sigma_0, \sigma_1$ 上で $|f(s)| \leq B$ と仮定する。また、t が十分大であれば $\theta = arg(s)$ は $\pi/2$ に近い。よって $t \geq t_2$ で $0 < (\alpha+1)\theta < \pi$ となるような、$t_2 > 0$ が存在する。このような t_2 をひとつ固定する。必要なら B を少し大きくとりかえて、$\sigma_0 \leq \sigma \leq \sigma_1$ かつ $t = t_2$ 上でも $|f(s)| < B$ としてよい。以下、以上の設定のもとで $t \geq t_2$ かつ $\sigma_0 \leq \sigma \leq \sigma_1$ ならば $|f(s)| < B$ であることを証明する。定数 $\epsilon > 0$ と $\lambda = \alpha + \delta$ ($0 < \delta < 1$ ）に対し $g(s) = f(s)e^{i\epsilon s^\lambda}$ とおく。$|g(s)| = |f(s)|e^{-\epsilon|s|^\lambda \sin(\lambda\theta)}$ であるが、$|s|$ 十分大で（一様に） $|f(s)| < Be^{|s|^\alpha}$ であるから、$|g(s)| \leq Be^{|s|^\lambda(1-\epsilon|s|^\delta \sin(\lambda\theta))}$ となる。十分小さな数 $a > 0$ を固定する。このときある $t_3 > 0$ があって、$t \geq t_3$ ならば $(\pi/2 - a) < (\alpha+\delta)\theta < (\pi/2 + a)$ となる。よって、$t > t_3$ の範囲でさらに $|s|$ を十分大にとれば、$1 < \epsilon|s|^\lambda \sin(\lambda\theta)$ となる。すなわち、ある $t_4 > t_2$ があって、 $t \geq t_4$ では $|g(s)| < B$ となる。一方で $\sigma = \sigma_0$ または σ_1 かつ $t \geq t_2$ の垂直線上でも、また $t = t_2$、$\sigma_0 \leq \sigma \leq \sigma_1$ の水平線分上でも

$$|g(s)| \leq |f(s)|e^{-\epsilon|s|^\lambda \sin(\lambda\theta)} \leq |f(s)| \leq B$$

である。(t_2 のとりかたにより、ここで $\sin(\lambda\theta) > 0$ であることを使用している。）すなわち $\sigma = \sigma_0, \sigma = \sigma_1, t = t_2, t = t_5$ ($t_5 \geq t_4$) で囲まれる長方形の 4 辺上で $|g(s)| \leq B$ であ

る。よって正則関数の最大値の原理により、その長方形のなかでも $|g(s)| \leq B$ である。t_5 はいくら大きくてもいいから、結局 $t \geq t_2$ なる垂直帯状領域内で $|g(s)| \leq B$ となる。元に戻って、$|f(s)| \leq Be^{\epsilon|s|^\lambda \sin(\lambda\theta)}$ であるが、ϵ は以上の評価において途中で t_4 を決めるときにしか影響していないから、正ならば何でもよく、結局 $|f(s)| \leq B$ となる。証明終わり。

次にガンマ関数の漸近的な挙動 (Stirling の公式など）について復習する。Whittaker-Watson [46] p. 278 (Chapter XIII, 13· 6) より、もし $|arg(z)| \leq \pi - \delta$ ($\delta > 0$) ならば $|z| \to \infty$ で

$$\log\Gamma(z+1) = (z+\frac{1}{2})\log z - 1 + \frac{1}{2}\log(2\pi) + O(|z|^{-1/2})$$

である。特に $Re(z)$ が有界なところを動くなら、$O(*)$ の部分は $Re(z)$ について一様に $const \times |Im(z)|^{-1/2}$ で押さえられるわけである。言い換えると、垂直帯状領域で $Re(s)$ について一様に

$$\begin{aligned} |\Gamma(s)| &\leq (C_1 e^{|s|^{-1/2}})\sqrt{2\pi}|s|^{\sigma-1/2}e^{-t\theta-\sigma} \\ \frac{1}{|\Gamma(s)|} &\leq (C_2 e^{-|s|^{-1/2}})\sqrt{2\pi}^{-1}|s|^{-\sigma+1/2}e^{t\theta+\sigma} \end{aligned}$$

となる。ここで前と同様、$s = \sigma + it, \theta = arg(z)$ とおいた。また C_1, C_2 は適当な正の定数である。以上より垂直帯状領域内で t が十分大きいところのみで考えて、$|\Gamma(s)| \leq C_3 e^{-ct}$, $|\Gamma(s)|^{-1} < C_4 e^{dt}$ （C_3, C_4, c, d は正の定数）がわかる。

さて、われわれの $\Lambda_\infty(s, f, g)$ が上記の定理の仮定を満たすことを示そう。整関数であることはもう示した。$Re(s)$ 十分大では、絶対収束するディリクレ級数（$Re(s)$ のみに関係する量で押さえられる。）とガンマ関数 2 個の積であるから、Stirling の公式より、$t \to \infty$ で、rapid decay である。関数等式より $Re(s)$ 十分小でも正しい。結果から考えればこの間の垂直帯状領域では当然有界なはずであるが、直接証明はすぐにはよくわからない。以下の証明はベストとは思えないが十分に考えている暇がないのでここでは、むりやり証明をつけておく。以下この垂直帯状領域で、e^{t^α} で押さえられることを言う。条件は $Re(s)$ が有界であることのみであるから、証明は少し慎重にやる必要がある。まず、 基本領域 D は $F_{c,d} = \{(x+iy \in H; 0 \leq x \leq c,\ y_0 < y\}$ とおくとき適当な c_i,d_i をもちいて $D \subset \cup_{i=1}^3 \xi_i(F_{c,d})$ とかける。ただし ξ_i は各カスプを $i\infty$ に移す写像とする。これより、積分を $F_{c,d}$ で評価したい。特に $y > y_0$ で

$$|W_{\pm k/2, s-1/2}(4\pi|m|y)| < \sum_i A_i \frac{|P_i(s)|}{|\Gamma(L_i(s))|} e^{-2\pi|m|y}(|m|y)^{a_i} y^{b_i}$$

と言う形に評価できる。ここで和は適当な有限和であり、$P_i(s)$ は s の多項式、$L_i(s)$ は s の 1 次式、定数 A_i, a_i, b_i は s にも y にもよらない。(ただしもちろん $Re(s)$ は有界としている。）証明は、Whittaker 関数のパラメーターについての漸化式と Whittaker 関数

の定義の積分表示を用いた評価による。これより、各 $F_{c,d}$ で $E|\xi^{-1}$ は $Re(s)$ によらずに「e^{t^α} と y について polynomial growth な項の積」で押さえられ、$f(z)g(z)$ は（積には定数項はあるけれども、$f(z)$ がカスプ形式だから）各カスプで rapid decay であるから、全体で $\Lambda_\infty(s,f,g)$ が $O(e^{t^\alpha})$ for some $\alpha>0$ となる。以上により、Phragmén-Lindelöf の定理によれば、この垂直帯状領域で $\Lambda_\infty(s,f,g)$ は $|t|\to\infty$ で一様に 0 にゆき、逆 Mellin 変換における積分路の取り替えが可能になる。

12 Plus space での Kohnen の技巧

前節の $\Lambda_{j/2}$ と $\Phi_{j/2}$ の関係についての主張を示して、全体の証明を完成させよう。plus space に属する保型形式での $z\to -1/4z$ などでの変換の計算は、Kohnen [19] に始まり、Kohnen-Zagier [20] などでも扱われている。せっかくだから、われわれに必要なかたちで詳しく証明を書いてみる

まず、$SL_2(\mathbb{R})$ の普遍被覆群（universal covering group) について復習する (cf. Shimura [36]。) 行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\in GL_2^+(\mathbb{R})$ （行列式が正の行列）にたいし、複素数値関数 $\phi(z)$ で $|\phi(z)|=\det(A)^{-1/4}|cz+d|^{1/2}$ となるものをとり、 そのような組 $(A,\phi(z))$ の集合 $\tilde{G}$ を考える。$\tilde{G}$ の元のかけ算を $(A,\phi(z))\times(B,\psi(z))=(AB,\phi(Bz)\psi(z))$ と定義すると $\tilde{G}$ は群になる。$\tilde{G}$ の $\det(A)=1$ なる元からなる部分群は $SL_2(\mathbb{R})$ の（同型を除いて一意的に決まる）普遍被覆群である。特に $\Gamma_0(4)$ から $\tilde{G}$ への写像を $\Gamma_0(4)\ni h\to(h,\theta(hz)/\theta(z))\in\tilde{G}$ と定義するとこれは群の埋め込みになる。(すなわち、$\Gamma_0(4)$ に制限すると、群拡大は split する。)

さて、任意の整数 k、任意の H_1 上の関数 $h(z)$、および $(A,\phi(z))\in\tilde{G}$ について

$$h|_{k-1/2}(A,\phi(z))=h(Az)\phi(z)^{-2k+1}|cz+d|^{k-1/2}.$$

とするとこれは群 $\tilde{G}$ の作用になる。(もし $h(z)=y^{k/2-1/4}h_0(z)$ とおけば、上の作用は Shimura [36] の $h_0(z)$ に対する普通の作用と一致する。今は実解析的な保型形式を扱うので少し定義をずらした。）特に、

$$\tau_{2,k}h(z)=(\frac{-iz}{|z|})^{-k+1/2}h(\frac{-1}{4z})=e^{i\pi(2k-1)/4}(\frac{z}{|z|})^{-k+1/2}h(\frac{-1}{4z})=h|_{k-1/2}(\sigma_0,(-2iz)^{k-1/2}),$$

と書こう。ただし複素数のルートは主値をとるものとする。ここの定義で、$(2z)^{k-1/2}$ ではなく、 $(-2iz)^{k-1/2}$ を取ったのは, $\tau_{2,k}^2f=f$ となるようにするためである。さて、$\Gamma_0(4)$ について「保型性」を満たす関数に対して、$\tau_{2,k}$ の作用を求めたい。このために σ_0 を $\Gamma_0(4)$ の元と関係づけることを試みたい。次の関係式に注意する。

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ 2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -1/2 \\ 8 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 2 & -1/2 \\ 0 & 2\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -1/2 \\ 8 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1/2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

ここで $\gamma \in \Gamma_0(4)$ に対する $\theta(\gamma z)/\theta(z)$ の公式、つまり

$$\theta(\gamma z)/\theta(z) = (\frac{c}{d})\epsilon_d^{-1}(cz+d)^{1/2},$$

を用いて、

$$\theta(z/(4z+1)) = (4z+1)^{1/2}\theta(z),\ \theta((3z-1)/(4z-1)) = i^{-1}(4z-1)^{1/2}\theta(z)$$

がわかる。よって、任意の $\gamma \in \Gamma_0(4)$ に対して、$h(\gamma z) = h(z)|cz+d|^{-k+1/2}(\theta(\gamma z)/\theta(z))^{2k-1}$ を満たす関数について、(上の行列の積を、$\tilde{G}$ のなかで考えて)

$$\begin{aligned} \tau_2(h(\frac{z+1}{4}) + h(\frac{z+3}{4})) &= h|_{k-1/2}\left(\begin{pmatrix} 2 & -1/2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, e^{-\pi i/4}\right) + h|_{k-1/2}\left(\begin{pmatrix} 2 & 1/2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, e^{\pi i/4}\right) \\ &= e^{\pi i(2k-1)/4}h(z-\frac{1}{4}) + e^{-\pi i(2k-1)/4}h(z+\frac{1}{4}) \end{aligned}$$

となる。もし $(-1)^k n \equiv 0,3 \bmod 4$ ならば $e^{\pi i(2k-1)/4}e^{-2\pi in/4} + e^{-\pi i(2k-1)/4}e^{2\pi in/4} = i^{k^2-k}\sqrt{2}$ となるので、もしフーリエ展開 $h(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} B(n,y)e^{2\pi inx}$ の n 番目のフーリエ係数 $B(n,y)$ が、$(-1)^k n \equiv 1,2 \bmod 4$ なら $B(n,y) = 0$ という "plus space" の条件を満たしているなら、上の式は $i^{k^2-k}\sqrt{2}h(z)$ と一致するのである。言い換えると、$\tau_{2,k}^2 = 1$ に注意すれば、

$$\tau_{2,k}h = \sqrt{2}^{-1}i^{k-k^2}(h(\frac{z+1}{4}) + h(\frac{z+3}{4}))$$

である。ここで、さらに $j = 0,\ 1$ に対して $h_{j/2}(z) = \sum_{n\equiv j \bmod 2} B(n,y/4)e^{2\pi inx/4}$ とおくと、右辺は $e^{n\pi i}+1=0$ の部分が消えて、$\sqrt{2}i^{k-k^2}h_0(z)$ になる。

次に $h(-1/4z+1/2)$ について考えると、あきらかに $h(z+1/2) = h_0(4z) - h_1(4z)$、$h(z) = h_0(4z) + h_1(4z)$ であるから

$$h(-1/4z+1/2) = h_0(-1/z) - h_1(-1/z) = 2h_0(-1/z) - h(-1/4z).$$

ここで、

$$\begin{aligned} h(-1/4z) &= \sqrt{2}e^{\pi i/4}i^{-k^2}(\frac{z}{|z|})^{k-1/2}h_0(z), \\ h_0(-1/z) &= \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\pi i/4}i^{k^2}(\frac{|z|}{-z})^{-k+1/2}h(z/4) \end{aligned}$$

となるので、

$$h(-1/4z+1/2) = \sqrt{2}e^{\pi i/4}i^{-k^2}(\frac{z}{|z|})^{k-1/2}h_1(z)$$

となる。特に h として、$y^{k/2-1/4}f(z)$, $g(z)$ をとって、以上を応用すれば

$$\begin{array}{rcl} (-2iz)^{-k+1/2}f(-1/4z) &=& 2^{-k+1}i^{k^2-k}f_0(z) \\ (-2iz)^{-k+1/2}f(-1/4z+1/2) &=& 2^{-k+1}i^{k^2-k}f_1(z) \\ e^{\pi i/4}(\frac{z}{|z|})^{-1/2}g(-1/4z) &=& \sqrt{2}g_0(z) \\ e^{\pi i/4}(\frac{z}{|z|})^{-1/2}g(-1/4z+1/2) &=& \sqrt{2}g_1(z) \end{array}$$

以上より、簡単な計算で

$$\int_{\Gamma_0(4)\backslash H_1} y^{k/2-1/4}f_j(z)g_j(z)\tilde{E}_\infty(z,s)y^{-2}dxdy = 2^{k-3/2}y^{k/2-1/4}f(z)g(z)\tilde{E}_{j/2}(z,s)y^{-2}dxdy$$

が結論できる。ただしここで $f_j(z) = \sum_{n=1, n\equiv j \bmod 2}^{\infty} c(n)e^{2\pi inz/4}$ と定義した。以上により、前節の主張 $\Lambda_\infty = \Lambda_0 + \Lambda_{1/2}$ が証明された。

13　付録：特殊関数のまとめ

この節については [32], [9], [28], [37] などを参照。

Whittaker の微分方程式:

$$\frac{d^2W}{dy} + \left(-\frac{1}{4} + \frac{\alpha}{y} + \frac{\frac{1}{4}-\beta^2}{y^2}\right)W = 0.$$

1 次独立な解は $W_{\alpha,\beta}(y)$ と $W_{-\alpha,\beta}(-y)$ で与えられる。ここで

Whittaker 関数の定義：

$$\begin{array}{rcl} W_{\alpha,\beta}(y) &=& \dfrac{y^{\beta+\frac{1}{2}}e^{-y/2}}{\Gamma(\beta-\alpha+1/2)}\displaystyle\int_0^\infty e^{-yu}u^{\beta-\alpha-1/2}(1+u)^{\alpha+\beta-1/2}du. \\ &=& \dfrac{y^{\alpha}e^{-y/2}}{\Gamma(\beta-\alpha+1/2)}\displaystyle\int_0^\infty e^{-u}u^{\beta-\alpha-1/2}(1+\frac{u}{y})^{\alpha+\beta-1/2}du. \end{array}$$

ここで $Re(\beta-\alpha+1/2) > 0$ と仮定している。それ以外の場合は、関係式

$$W_{\alpha,\beta}(y) = y^{1/2}W_{\alpha-1/2,\beta+1/2}(y) + (1/2-\alpha-\beta)W_{\alpha-1,\beta}(y)$$

により上に帰着する。実は $W_{\alpha,\beta}(y) = W_{\alpha,-\beta}(y)$ である。また $y\to\infty$ で $W_{\alpha,\beta}(y) \sim y^{\alpha}e^{-y/2}$ (比が 1 に収束）である。

Whittaker 関数の評価： この項は、Shimura [37] p.90 Lemma 4 による。証明もこの論文を参照されたい。

$\mathbb{C}^2$ の任意のコンパクト集合 K に対し、K のみによるある正の定数 A と B があって、

$$|\Gamma(\beta-\alpha+1/2)W_{\alpha,\beta}(y)| < Ae^{-y/2}y^{Re(\alpha)}\cdot\max(y^{-B},1) \text{ if } (\alpha,\beta)\in K,\ y>0$$

となる。(パラメーターに依存しないところがポイントである。通常の公式集に出ている漸近展開はこの点が曖昧である。）

指数関数との関係： l を 0 以上の整数とすると

$$W_{l+\mu+1/2,\mu}(y) = (-1)^l y^{\mu+1/2}e^{-y/2}(2\mu+1)_l\ {}_1F_1(-l;2\mu+1;y).$$

たとえば、$l=0,\ \mu=-1/4$ として、$W_{1/4,1/4}(y)=W_{1/4,-1/4}(y)=y^{1/4}e^{-y/2}$ である。ただし、一般超幾何関数 ${}_1F_1$ の定義は、0 以上の整数 n について $(\alpha)_n = \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)$, $(\alpha)_0=1$ とすると

$${}_1F_1(\alpha;\beta;y) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n}{(\beta)_n}y^n$$

であった。（ここで β は負の整数ではないとする。）特に、α が 0 または負の整数なら、${}_1F_1$ は y の多項式である。

Whittaker 関数の微分： この項の証明は [28] を参照。次の関係式が知られている。

$$\begin{aligned} y\frac{d}{dy}W_{\alpha,\beta}(y)-(\alpha-\frac{y}{2})W_{\alpha,\beta}(y) &= -(\beta^2-(\alpha-\frac{1}{2})^2)W_{\alpha-1,\beta}(y) \\ y\frac{d}{dy}W_{\alpha,\beta}(y)+(\alpha-\frac{y}{2})W_{\alpha,\zeta}(y) &= -W_{\alpha+1,\beta}(y) \end{aligned}$$

よって、特に

$$\begin{aligned} L_{-k}(W_{-k/2,s-1/2}(4\pi|m|y)e^{2\pi imx} &= (s+\frac{k}{2})(1-s+\frac{k}{2})W_{-(k+2)/2,s-1/2}(4\pi|m|y)e^{2\pi imx}) \\ L_{-k}(W_{-k/2,s-1/2}(4\pi|m|y)e^{-2\pi imx}) &= -W_{(k+2)/2,s-1/2}(4\pi|m|y)e^{2\pi imx} \end{aligned}$$

となる。

K-Bessel 関数の定義:

$$K_\beta(y) = K_{-\beta}(y) = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-y(t+t^{-1})/2}t^{\beta-1}dt.$$

Whittaker 関数との関係は

$$W_{0,\beta}(y) = (y/\pi)^{1/2}K_\beta(y/2).$$

Mellin 変換: 次のように定義する。

$$I(s,\alpha,\beta)=\int_0^\infty \frac{(1+u)^{\alpha-1}u^{\beta-1}}{(1+2u)^s}du.$$

これは超幾何級数の特殊値である。これを用いて Whittaker 関数の Mellin 変換が書ける。

$$\int_0^\infty W_{\alpha,\beta}(y)y^{s-1}dy=2^{s+\beta+1/2}\frac{\Gamma(s+\beta+1/2)}{\Gamma(\beta-\alpha+1/2)}I(s+\beta+1/2,\alpha+\beta+1/2,\beta-\alpha+1/2).$$

2,3 の公式：

$$\begin{aligned}
I(s,\alpha,\alpha) &= 2^{-2\alpha}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma((s+1)/2-\alpha)}{\Gamma((s+1)/2)}.\\
I(0,\alpha,\beta) &= \frac{\Gamma(\beta)\Gamma(1-\beta-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)}.
\end{aligned}$$

証明:(1) $t=u(u+1)$ とおくと $dt=(2u+1)du=2(t+1/4)^{1/2}du$ かつ $(2u+1)^2=4t+1$. よって

$$I(s,\alpha,\alpha)=\int_0^\infty \frac{t^{\alpha-1}}{(4t+1)^{(s+1)/2}}dt.$$

となる。ここで $x/4=t(4t+1)^{-1}$ とすれば $dx=4(4t+1)^{-2}dt$、$(1-x)(1+4t)=1$ である。よって、$B(x,y)$ とベータ関数とすると

$$\begin{aligned}
I(s,\alpha,\alpha) &= 2^{-2\alpha}\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{(s-1)/2-\alpha}dx\\
&= B(\alpha,(s+1)/2-\alpha)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma((s+1)/2-\alpha)}{\Gamma((s+1)/2)}
\end{aligned}$$

となる。

(2) $t=u(1+u)^{-1}$ とおくと $(1+u)(1-t)=1$, $u=t(1-t)^{-1}$ で、$du=(1+u)^2dt=(1-t)^{-2}dt$ となる。よって

$$\begin{aligned}
I(0,\alpha,\beta) &= \int_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{-\alpha-\beta}dt\\
&= B(\beta,1-\alpha-\beta)=\frac{\Gamma(\beta)\Gamma(1-\alpha-\beta)}{\Gamma(1-\alpha)}.
\end{aligned}$$

q.e.d.

References

[1] L. V. Ahlfors, Complex analysis, McGraw-Hill, Kogakusha, 1966.

[2] A. N. Andrianov, Modular decent and the Saito-Kurokawa conjecture, Invent. Math. 53(1979), 267-280.

[3] A. N. Andrianov, Quadratic forms and Hecke operators, 1987, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokyo.

[4] D. Bump, Automorphic forms and representations, Cambridge Studies in Advanced MAth. 55, 1996, Cambridge University Press.

[5] S. Böcherer, Bemerkungen über die Dirichletreihen von Koecher und Maass, Mathematica Gottingensis Schriftreihe des SFB, Geometrie und Analysis, Heft 68, 1986.

[6] H. Cohen, Sums involving the values at negative integers of L functions of quadratic characters, Math. Ann. 217(1975), 271-285.

[7] W. Duke and Ö. Imamoḡlu, A converse Theorem and the Saito-Kurokawa Lift, International Mathematics Research Notices 7 (1996), 347-355.

[8] M. Eichler and D. Zagier, The theory of Jacobi forms, Progr. Math. 55 (1985) Birkhäuser, Boston.

[9] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, Table of integrals, series and products, corrected and enlarged edition, 1980, Academic Press, New York.

[10] D. Goldfeld and J. Hoffstein, Eisenstein series of $\frac{1}{2}$-weight and the mean value of real Dirichlet series, Invent. Math. 80(1985), 185-208.

[11] Harish-Chandra, Automorphic forms on semisimple Lie groups, Lecture Notes in Math. 62, Springer 1968, Berlin, Heidelberg, New York.

[12] E. Hecke, Mathematische Werke, Göttingen Vandenhoeck and Ruprecht, 1970.

[13] F. Hirzebruch and D. Zagier, Intersection numbers of curves on Hilbert modular surfaces and modular forms of Nebentypus, Inv. Math. 36(1976), 57-113.

[14] T. Ibukiyama and H. Saito, On zeta functions associated to symmetric matrices (II), MPI preprint series 97-37.

[15] K. Imai, Generalization of Hecke's correspondence to Siegel modular forms, Amer. J. Math. 102(1980), 903-936.

[16] S. Ito(伊藤清三）, 数学選書４ ルベーグ積分入門、裳華房 昭和３８年 (1963)

[17] M. Kaneko, A Generalization of the Chowla-Selberg formula and the zeta functions of quadratic orders, Proc. Japan Acad. 66 Ser. A (1990), 201-203.

[18] S. Katok and P. Sarnak, Heegner points, cycles and Maass forms, Israel J. Math. 84(1993), 193-227.

[19] W. Kohnen, Modular forms of half-integral weight of $\Gamma_0(4)$, Math. Ann. 248 (1980), 249-266.

[20] W. Kohnen and D. Zagier, Values of L-series of modular forms at the center of the critical strip, Invent. Math. 64(1981), 175-198.

[21] T. Kubota（久保田富雄）, Eisenstein 級数の初等理論、東大セミナリーノート 18, 1968.

[22] T. Kubota, Elementary Theory of Eisenstein Series, Kodansha Ltd. (Tokyo), Halsted Press (New York), 1973.

[23] N. Kurokawa, Examples of eigen values of Hecke operators on Siegel cusp forms of degree two, Invent. Math. 49(1978), 149-165.

[24] S. Lang, Algebraic Number Theory, Addison Wesley 1970.

[25] S. Lang, Elliptic functions, Addison-Wesley Publishing Company, London · Amsterdam, · Don Mills, Ontario · Sydney · Tokyo, 1973.

[26] S. Lang, $SL_2(\mathbb{R})$, Springer-Verlag, 1975.

[27] H. Maass, Über die neue Art von nichtanalytischen automorphen Funktionen und die Bestimmung Dirichletscher Reihen durch Funktionalgleichungen, Math. Ann. 121(1949), 141-183.

[28] H. Maass, Die differentialgleichungen in der Theorie der elliptischen Modulfunktionen, Math. Ann. 125(1953), 235-263.

[29] H. Maass, Siegel's modular forms and Dirichlet series, Springer Lecture Note 216, 1971, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.

[30] H. Maass, Über die Fourierkoeffizienten der Eisensteinreihen zweiten grades, Matematisk-fysiske Meddelelser 38, 14, Der Kongelige Danske Videnskabernes Selskab, (1972), 1-25.

[31] H. Maass, Über spezialshar von Modulformen zweiten Grades, Invent. Math. 52 (1969), 95-104; II ibid. 53(1979), 249-253; III, ibid. 255-265.

[32] W. Magnus and F. Oberhettinger, Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der Mathematischen Physik, 2 Auflage, Die Grundlehren der Mathematischen Wissenshaften in Einzeldarstellingen, Band LII, Springer Verlag, Berlin, Gottingen, Heidelberg (1948).

[33] H. L. Resnikoff and R. L. Saldana, Some properties of Eisenstein series of degree two, J. Reine Angew. Math. 265 (1974), 90-109.

[34] W. Roelcke, Das Eigenwertproblem der automorphen Formen in der hyperbolischer Ebene, I, II, Math. Ann. 167(1966), 292-337; ibid.,168(1967),261-324.

[35] W. Rudin, Real and complex analysis, McGraw Hill, 1966.

[36] G. Shimura, On modular forms of half integral weight, Ann. Math. 97(1973), 440-481.

[37] G. Shimura, On the holomorphy of certain Dirichlet series, Proc. London Math. Soc. (3)31 (1975), 79-98.

[38] T. Shintani, On construction of holomorphic cusp forms of half integral weight, Nagoya Math. J. 58(1975), 83-126.

[39] C. L. Siegel, Gesammelte Abhandlungen I, II, III, IV, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1966.

[40] T. Takagi(高木貞治)、解析概論（改訂第３版）、1961, 岩波書店

[41] A. Terras, Harmonic analysis on symmetric spaces and application I, II, Springer-Verlag, 1985, 1988.

[42] E. C. Titchmarsh, Introduction to the theory of Fourier integrals, Oxford at the Clarendon Press, Second Edition, 1948.

[43] J. L. Waldspurger, Correspondance de Shimura et Shintani, J. Math. pures et appl. 59(1980), 1-133.

[44] J. L. Waldspurger, Sur les coefficients de Fourier des forms modulaires de poids demientier. J. Math. pures et appl. 60(1981), 375-484.

[45] R. Weissauer, Siegel modular forms and Dirichlet series, preprint.

[46] E. T. Whittaker and G. N. Watson, A course of modern analysis, fourth edition, Cambridge at the University Press, (1935).

[47] H. Yoshida, Siegel's modular forms and the arithmetic of quadratic forms, Invent. Math. 60(1980), 193-248.

[48] D. Zagier, Modular forms whose Fourier coefficients involve zeta-Functions of quadratic fields, Modular functions of one variable VI, Proceedings, Bonn 1976, Edited by J. P. Serre and D. B. Zagier, Springer Lecture Note 627 (1977), 105-169.

[49] D. Zagier, Sur la conjecture de Saito-Kurokawa (d'aprés H. Maass), Séminaire Delange-Pisot-Poitou 1979-1980. Progress in Math. 12, Birkhäuser (1981), 371-394.

[50] D. Zagier, The Rankin-Selberg method for automorphic functions which are not of rapid decay, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 28(1981), 415-437.

[51] 整数論サマースクール報告集、第 1 回 「アイゼンシュタイン級数について」1993, 第２回 「志村多様体と保型形式」1994, 第 3 回 「等質空間と保型形式」1995, 第 4 回「Weil 表現入門」1996.

〒５６０
大阪府豊中市待兼山町１－１６
大阪大学大学院理学研究科数学専攻
伊吹山知義
email: ibukiyam@math.wani.osaka-u.ac.jp