

§5 同値関係と商集合

必修問題

- 5.A 集合 A から A 自身への全単射のことを A 上の置換という。 A 上の置換全体のなす集合を、ここでは $S(A)$ と書くことにしよう。 $S(A)$ 上に、次のようにして関係 \sim を定義する：置換 $f, f' \in S(A)$ に対し

$$f \sim f' \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} f' = g^{-1} \circ f \circ g \text{ となるような } g \in S(A) \text{ が存在する}$$

と定める。この関係 \sim が $S(A)$ 上の同値関係であることを証明せよ。

- 5.B 次に挙げる \mathbb{R} 上の関係 \sim が同値関係であるかどうか判定せよ。ただし、 \mathbb{R} は実数全体の集合、 \mathbb{Q} は有理数全体の集合、 \mathbb{Z} は整数全体の集合である。また、 $\mathbb{Z}\sqrt{2}$ という記号で、集合 $\{n\sqrt{2} \mid n \in \mathbb{Z}\}$ のことを表す。

- (1) 実数 $x, y \in \mathbb{R}$ に対し、 $x \sim y \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} x - y \in \mathbb{Q}$.
- (2) 実数 $x, y \in \mathbb{R}$ に対し、 $x \sim y \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} x - y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
- (3) 実数 $x, y \in \mathbb{R}$ に対し、 $x \sim y \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} (x - y \in \mathbb{Z} \text{ または } x - y \in \mathbb{Z}\sqrt{2})$.
- (4) 実数 $x, y \in \mathbb{R}$ に対し、 $x \sim y \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} x - y \in \{m + n\sqrt{2} \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$.

任意提出問題

- 5.1 次の問いに答えよ。

- (1) 2つの写像 $f: A \rightarrow B, g: A \rightarrow C$ に対し、 $h \circ g = f$ を満たす写像 $h: C \rightarrow B$ が存在するための必要十分条件は「 $f(x) = f(y) \Rightarrow g(x) = g(y)$ 」で与えられる。このことを証明せよ。
- (2) \sim を集合 A 上の同値関係とする。標準的射影 $\pi: A \rightarrow A/\sim$ と $f: A \rightarrow B$ に対し、 $\bar{f} \circ \pi = f$ を満たす写像 $\bar{f}: A/\sim \rightarrow B$ が存在するための必要十分条件は何か。同値関係 \sim を用いて述べよ。

- 5.2 $A = \{1, 2, \dots, n\}$ 上の置換全体のなす集合 $S(A)$ のことを S_n と書く。問題 5.A の同値関係 \sim による商集合 S_n/\sim を考えよう。 $n = 8$ のとき、この商集合は何個の元からなるか。 [ヒント： A 上の置換を巡回置換の積として表す。]

- 5.3 A を集合とし、 $R \subset A \times A$ を A 上の関係とする。 R を部分集合として含むような A 上の同値関係の中で最小のものを、 R によって生成される同値関係と呼ぶ。

いま、 $A = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ とする。 A 上に

$$R = \{(x, 1-x) \mid x \in A\} \cup \{(x, 1/x) \mid x \in A\}$$

という関係 R があるとき、この関係 R によって生成される同値関係 \sim について、 $x \in A = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ の属する同値類を外延的記法を用いて表せ。