

§8 順序集合 (1)

必修問題

8.A $X = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 2\} = \{2, 3, 4, \dots\}$ とする. X に次のようにして関係 \leq' を定義する:

$$a \leq' b \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} a \text{ は } b \text{ を割り切る.}$$

- (1) \leq' は集合 X 上の順序である. 理由を述べよ. また, \leq' は全順序か否か答えよ.
- (2) (X, \leq') の極大元全体の集合, 極小元全体の集合を決定せよ.

8.B \mathbb{N} の通常の順序 (大小関係による順序) を \leq と書く. また, $X = \{1, 2\} \times \mathbb{N}$ として, 次のように定義される X の順序 \leq' を考える:

$$(m_1, n_1) \leq' (m_2, n_2) \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} m_1 < m_2 \text{ または } (m_1 = m_2 \text{ かつ } n_1 \leq n_2).$$

(\mathbb{N}, \leq) と (X, \leq') が順序同型ではないことを示せ.

任意提出問題

8.1 $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ に, 問題 8.A と同じようにして次のように順序 \leq' を定める:

$$a \leq' b \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} a \text{ は } b \text{ を割り切る.}$$

\mathbb{N} の空でない有限部分集合 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ に対し, A の上限および下限は何か.

8.2 $a < b$ を満たす実数 a, b を考える. 4 個の区間

$$(a, b), [a, b), (a, b], [a, b]$$

を通常の順序によって順序集合と考えると, どの 2 個をとっても互いに順序同型でないことを示せ.

8.3 \mathbb{R} の通常の順序を \leq と書く. また, $X = \{1, 2\} \times \mathbb{R}$ として, 問題 8.B と同様に定義される X の順序 \leq' を考える. (\mathbb{R}, \leq) と (X, \leq') が順序同型ではないことを示せ. [ヒント: \mathbb{R} の順序完備性 (\mathbb{R} の上に有界な空でない部分集合は上限を持つ).]

8.4 上限に関する次の問いに答えよ.

- (1) (X, \leq) を全順序集合とし, A をその部分集合とする. $a \in X$ が A の上限であるための必要十分条件は, 次の (i), (ii) で与えられることを示せ.
 - (i) 任意の $x \in A$ に対し $x \leq a$.
 - (ii) $b < a$ であるような任意の $b \in X$ に対し, $b < x (\leq a)$ を満たす $x \in A$ が存在する.
- (2) (X, \leq) が全順序集合でないときは, (1) と同じ主張は必ずしも成り立たない. 反例を挙げよ.