2017 年度・幾何学序論演義　　2017 年 4 月 14 日

§0　位相空間論の復習

1. 次を証明せよ．
   (1) X を Hausdorff 空間とし，A を X のコンパクト部分集合とする．そのとき A は X の閉集合である．
   (2) X をコンパクト位相空間，Y を Hausdorff 空間とする．そのとき，全単射連続写像 $f\colon X \to Y$ は必ず同相写像となる．

2. （『多様体の基礎』問題 5.5）
   位相空間の間の連続写像 $f\colon X \to Y$ を考える．ここに f は上への写像（全射のこと）で，Y には f による商位相が入っているものとする．さらに位相空間 Z と写像 $g\colon X \to Z$ と $h\colon Y \to Z$ があって，次の図式が可換であるとする（つまり $g = h \circ f$ が成り立つとする）．

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & Z \\ Y \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

   このとき，h が連続写像であるためには，g が連続写像であることが必要十分であることを示せ．

3. m を正整数とする．$\mathbb{R}^m$ に次のような同値関係 $\sim$ を導入する：

$$\boldsymbol{x} \sim \boldsymbol{y} \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \text{ または } \boldsymbol{x} = -\boldsymbol{y}.$$

   商集合 $\mathbb{R}^m/{\sim}$ を，標準射影 $\pi\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m/{\sim}$ による $\mathbb{R}^m$ の商空間とみなす．
   (1) $\mathbb{R}^2/{\sim}$ が $\mathbb{R}^2$ と同相であることを証明せよ．
   (2) $\mathbb{R}^3/{\sim}$ は $\mathbb{R}^3$ と同相ではないことを証明せよ．
   ［コメント：(2) は少々難しいです．できなくても心配する必要はありません．たとえば単連結性の概念を知っているなら，それを手がかりにするとよい．$\mathbb{R}^3/{\sim}$ と $\mathbb{R}^3$ はどちらも単連結ですが，ちょっと工夫すると……］