§1　位相空間論の復習（続），多変数関数の微分の復習

位相空間論

4. （『多様体の基礎』問題 5.1）
位相空間 X の部分集合 A に相対位相を入れて部分空間とする．このとき，包含写像 $i\colon A \to X$ は連続写像であることを示せ．

5. （『多様体の基礎』問題 5.3）
$f\colon Z \to X, g\colon Z \to Y$ をともに位相空間の間の連続写像とする．写像 $F\colon Z \to X \times Y$ を $F(p) = (f(p), g(p))$ と定義する．この F が Z から積空間 $X \times Y$ への連続写像になることを示せ．

6. （『多様体の基礎』問題 5.7）
2 つの Hausdorff 空間の積空間は Hausdorff 空間である．これを示せ．

7. 次の問いに答えよ．
   (1) X, Y を位相空間，$f\colon X \to Y$ を全射連続写像とする．そのとき，X がコンパクトならば Y もコンパクトであることを証明せよ．
   (2) X を空でないコンパクトな位相空間とするとき，任意の実数値連続関数 $f\colon X \to \mathbb{R}$ は最大値を持つことを証明せよ．

8. 位相空間 X の**道** (path) とは，区間 $[0, 1]$ から X への連続写像のことである．位相空間 X の任意の 2 点 $p, q \in X$ に対して p から q に達する道（すなわち $\gamma(0) = p, \gamma(1) = q$ を満たすような道 γ）が存在するとき，X は**弧状連結** (path-connected, pathwise connected) であるという．
弧状連結な位相空間は連結であることを証明せよ．

9. 位相空間 X が**局所弧状連結** (locally path-connected) であるとは，X の任意の点が，弧状連結な近傍を持つことをいう．
局所弧状連結な位相空間 X について考える．その仮定のもとで，X が連結であることと弧状連結であることは同値であることを証明せよ．

（裏面に続く）

10. 位相空間 X について，「任意の点 $p \in X$ に対し，0 以上の整数 m を適切に選べば，p を含む m 次元座標近傍 (U, φ) が存在する」という条件が満たされるとき，X は**局所 Euclid** (locally Euclidean) であるといわれる．（座標近傍の概念については『多様体の基礎』定義 6.I を参照．なお，$\mathbb{R}^0$ は 1 点からなる位相空間と考える．）

さて，ここからは m を一つの与えられた正整数とする．2 元からなる集合 $\{0, 1\}$ に離散位相を与え，積空間 $X = \mathbb{R}^m \times \{0, 1\}$ を考える．さらに X に，$\mathbf{0}$ でない $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m$ に対し $(\boldsymbol{x}, 0)$ と $(\boldsymbol{x}, 1)$ を同一視するような同値関係 $\sim$ を与える．すなわち：

$$(\boldsymbol{x}, b) \sim (\boldsymbol{x}', b') \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\boldsymbol{x}, b) = (\boldsymbol{x}', b') \text{ または } \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}' \neq \mathbf{0}.$$

標準的な全射 $\pi \colon X \to X/{\sim}$ により，$X/{\sim}$ を X の商空間とみなす．

(1) $X/{\sim}$ が局所 Euclid であることを示せ．

(2) $X/{\sim}$ は Hausdorff 空間ではないことを示せ．

（$m = 1$ に対する $X/{\sim}$ は “the line with two origins” と呼ばれる．）

多変数関数の微分

11. （『多様体の基礎』問題 4.2）
$\mathbb{R}^m$ の開集合 U 上の関数 f が C^r 級 $(r \geq 1)$ であるための必要十分条件は，m 個の偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \dfrac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \dfrac{\partial f}{\partial x_m}$ が C^{r-1} 級関数になることである．このことを証明せよ．

12. （『多様体の基礎』問題 4.3）
$\mathbb{R}^m$ の開集合 U 上の C^1 級関数 f が，点 $\boldsymbol{x}_0 \in U$ で最大値または最小値をとれば，$\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}_0) = 0 \ (i = 1, 2, \dots, m)$ が成り立つ．逆に，$\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}_0) = 0 \ (i = 1, 2, \dots, m)$ であれば，f は $\boldsymbol{x}_0$ で最大値または最小値をとるといえるか．

13. （『多様体の基礎』定理 4.3）
$\mathbb{R}^m$ の開集合 U 上の C^2 級関数 f について

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \qquad (i,\ j = 1,\ 2,\ \dots,\ m)$$

が成り立つことを示せ．

14. U, V を $\mathbb{R}^m$ の開集合とし，$g \colon U \to V$ を C^1 級微分同相写像とする．また，$f \colon V \to \mathbb{R}^n$ を C^1 級写像とする．そのとき，任意の $\boldsymbol{x} \in U$ に対して，f の $g(\boldsymbol{x})$ における Jacobi 行列 $(Jf)_{g(\boldsymbol{x})}$ の階数と $f \circ g$ の $\boldsymbol{x}$ における Jacobi 行列 $(J(f \circ g))_{\boldsymbol{x}}$ の階数が一致することを示せ．