§2　微分可能多様体．特に球面について

m 次元球面 S^m

15.　m 次元球面 $S^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$ において，『多様体の基礎』47 ページの例 4 のように，立体射影を用いた C^∞ 級座標近傍系 $\mathscr{T} = \{ (U, \varphi), (V, \psi) \}$ を考える．すなわち，$U = S^m \setminus \{ p_{+1} \}$, $V = S^m \setminus \{ p_{-1} \}$, $p_{\pm 1} = (0, \ldots, 0, \pm 1)$（複号同順）であって，局所座標系 $\varphi \colon U \to \mathbb{R}^m$, $\psi \colon V \to \mathbb{R}^m$ は次式で与えられる（ただし，$\boldsymbol{x}'$ という記号は $\mathbb{R}^m$ の元を表している）：

$$\varphi(\boldsymbol{x}', x_{m+1}) = \frac{1}{1 - x_{m+1}} \boldsymbol{x}', \qquad \psi(\boldsymbol{x}', x_{m+1}) = \frac{1}{1 + x_{m+1}} \boldsymbol{x}'.$$

49 ページの式 (6.13) にあるように，座標変換 $\psi \circ \varphi^{-1} \colon \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ は

$$(\psi \circ \varphi^{-1})(\boldsymbol{y}) = \frac{1}{\|\boldsymbol{y}\|^2} \boldsymbol{y}, \qquad \boldsymbol{y} \in \varphi(U \cap V) = \mathbb{R}^m \setminus \{ \boldsymbol{o} \}$$

となる．この座標変換の式を求める計算の詳細を説明せよ．さらにこの結論によれば，ベクトル $\boldsymbol{y}$ と $(\psi \circ \varphi^{-1})(\boldsymbol{y})$ は平行で，またそれらの内積は 1 となるのだが，そのことを計算によらずに初等幾何的考察によって説明せよ．

16.　（『多様体の基礎』問題 6.2）

m 次元球面 S^m において，前問の $\mathscr{T}$ とは別に，半球からの射影を用いた C^∞ 級座標近傍系 $\mathscr{S}$ を考える（43 ページ例 2）．$\mathscr{S}$ と $\mathscr{T}$ が同値な C^∞ 級座標近傍系であることを証明したい．

『多様体の基礎』にあるとおり

$$\mathscr{S} = \{ (U_1^+, \varphi_1^+), (U_1^-, \varphi_1^-), \ldots, (U_m^+, \varphi_m^+), (U_m^-, \varphi_m^-), (U_{m+1}^+, \varphi_{m+1}^+), (U_{m+1}^-, \varphi_{m+1}^-) \},$$

という記号を用いる．上記の事柄の証明の一部として，$i = 1, \ldots, m, m+1$ に対し，座標変換 $\varphi \circ (\varphi_i^+)^{-1} \colon \varphi_i^+(U_i^+ \cap U) \to \varphi(U_i^+ \cap U)$ が C^∞ 級微分同相写像であることを示せ．［$i = 1, \ldots, m$ と $i = m+1$ で分けて考える必要がある．］

17.　次を証明せよ．このことを指して，m 次元球面 S^m は $\mathbb{R}^{m+1}$ の m 次元 C^∞ 級**部分多様体** (submanifold) であるとか C^∞ 級**超曲面** (hypersurface) であるとかいう（『多様体の基礎』定義 12.III）．

S^m の任意の点 p に対し，p を含む $\mathbb{R}^{m+1}$ の座標近傍 $(U, \varphi) = (U; x_1, \ldots, x_m, x_{m+1})$ であって[*]，次が成り立つようなものが存在する：

(i)　(U, φ) は $\mathbb{R}^{m+1}$ の C^∞ 級座標近傍になっている（54 ページに述べられているとおりの意味で）．

(ii)　$U \cap S^m = \{ q \in U \mid x_{m+1}(q) = 0 \}$ である．

[*] φ の第 1 成分，……，第 m 成分，第 $m+1$ 成分を与える関数 $U \to \mathbb{R}$ をそれぞれ $x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}$ として，こういう書き方をすることがある．『多様体の基礎』38 ページの「注意」も参照．

極座標の局所座標系としての取り扱い

18.　位相空間 $\mathbb{R}^2 \setminus \{\, \boldsymbol{o} \,\}$ について考える．これを $\mathbb{R}^2$ の開部分多様体とみなすことができる．すなわち，$\mathbb{R}^2$ には自明な C^∞ 級座標近傍系 $\{\, (\mathbb{R}^2, \mathrm{id}) \,\}$ があって，これを $\mathbb{R}^2 \setminus \{\, \boldsymbol{o} \,\}$ に制限することにより得られる $\mathscr{S} = \{\, (\mathbb{R}^2 \setminus \{\, \boldsymbol{o} \,\}, \mathrm{id}) \,\}$ は $\mathbb{R}^2 \setminus \{\, \boldsymbol{o} \,\}$ の C^∞ 級座標近傍系を与えるから，これにより $\mathbb{R}^2 \setminus \{\, \boldsymbol{o} \,\}$ を C^∞ 級多様体とみなす．

ここではもう一つの C^∞ 級座標近傍系を与えたい．$\mathbb{R}^2 \setminus \{\, \boldsymbol{o} \,\}$ を次の 4 つの開集合 $U_\pm, V_\pm$ によって被覆する：$U_\pm = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \gtrless 0 \,\}$, $V_\pm = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \gtrless 0 \,\}$（複号同順）．写像 $\varphi_\pm, \psi_\pm$ を次のように定める（$\boldsymbol{x} = (x, y)$ と書く）：

$$
\begin{aligned}
&\varphi_+ \colon U_+ \to (0, \infty) \times (-\pi/2, \pi/2), && \varphi_+(\boldsymbol{x}) = (\|\boldsymbol{x}\|, \arcsin_+(y/\|\boldsymbol{x}\|)) \\
&\varphi_- \colon U_- \to (0, \infty) \times (\pi/2, 3\pi/2), && \varphi_-(\boldsymbol{x}) = (\|\boldsymbol{x}\|, \arcsin_-(y/\|\boldsymbol{x}\|)) \\
&\psi_+ \colon V_+ \to (0, \infty) \times (0, \pi), && \psi_+(\boldsymbol{x}) = (\|\boldsymbol{x}\|, \arccos_+(x/\|\boldsymbol{x}\|)) \\
&\psi_- \colon V_- \to (0, \infty) \times (-\pi, 0), && \psi_-(\boldsymbol{x}) = (\|\boldsymbol{x}\|, \arccos_-(x/\|\boldsymbol{x}\|)).
\end{aligned}
$$

ただし $\arcsin_\pm, \arccos_\pm$ はそれぞれ，区間 $(-1, 1)$ 上で定義された適切な区間を終域とする $\sin, \cos$ の逆関数である（これらの関数が C^∞ 級であることは認めてよい）．

(1)　$\mathscr{T} = \{\, (U_+, \varphi_+), (U_-, \varphi_-), (V_+, \psi_+), (V_-, \psi_-) \,\}$ も位相空間 $\mathbb{R}^2 \setminus \{\, \boldsymbol{o} \,\}$ の C^∞ 級座標近傍系を与えることを示せ．

(2)　$\mathscr{S}$ と $\mathscr{T}$ は $\mathbb{R}^2 \setminus \{\, \boldsymbol{o} \,\}$ の同値な C^∞ 級座標近傍系であることを示せ．

19.　一般に，座標近傍 (U, φ) と $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ に対し，$U \subset \tilde{U}$ かつ $\tilde{\varphi}|_U = \varphi$ であるとき，座標近傍 $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ は (U, φ) の拡張であるということにする．前問の座標近傍 (U_+, φ_+) に対し，その拡張となっているような位相空間 $\mathbb{R}^2 \setminus \{\, \boldsymbol{o} \,\}$ 上の座標近傍 $(\tilde{U}_+, \tilde{\varphi}_+)$ であって，$\boldsymbol{o} \in \tilde{U}_+$ であるようなものは存在しないことを証明せよ．

微分可能多様体についての基本事項

20.　（『多様体の基礎』問題 6.1．積多様体）

$1 \leq r \leq \infty$ とする．M を m 次元 C^r 級多様体，N を n 次元 C^r 級多様体とし，各々の C^r 級座標近傍系を $\mathscr{S} = \{\, (U_\alpha, \varphi_\alpha) \,\}_{\alpha \in A}$, $\mathscr{T} = \{\, (V_\beta, \psi_\beta) \,\}_{\beta \in B}$ とする．すると積空間 $M \times N$ は

$$
\{\, (U_\alpha \times V_\beta, \varphi_\alpha \times \psi_\beta) \,\}_{(\alpha, \beta) \in A \times B}
$$

という座標近傍系によって $m + n$ 次元 C^r 級多様体になる．このことを証明せよ．（$\varphi_\alpha \times \psi_\beta$ という写像の定義も説明すること．）

21.　（『多様体の基礎』問題 6.4 + α．同値でない座標近傍系の例）

$\varphi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $\varphi(x) = x^3$ と定義すると，$(\mathbb{R}, \varphi)$ は $\mathbb{R}$ の座標近傍になる．$(\mathbb{R}, \varphi)$ だけからなる座標近傍系 $\mathscr{T} = \{\, (\mathbb{R}, \varphi) \,\}$ は $\mathbb{R}$ に C^∞ 級多様体の構造を定める．また $\mathscr{S} = \{\, (\mathbb{R}, \mathrm{id}) \,\}$ を $\mathbb{R}$ の通常の C^∞ 級座標近傍系とする．

(1)　$\mathscr{T}$ と $\mathscr{S}$ とは同値な座標近傍系ではない．そのことを示せ．

(2)　$\mathbb{R}$ を 2 つの座標近傍系 $\mathscr{T}, \mathscr{S}$ の各々によって C^∞ 級多様体とみなしたものを，それぞれ $(\mathbb{R}, \mathscr{T}), (\mathbb{R}, \mathscr{S})$ と書く．$(\mathbb{R}, \mathscr{T})$ と $(\mathbb{R}, \mathscr{S})$ が互いに C^∞ 級微分同相であることを証明せよ．