§3　微分可能な関数・写像

球面における微分可能な関数・写像

22. （『多様体の基礎』問題 7.1）
 m 次元球面 $S^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$ において，関数 h_k $(k = 1, \dots, m, m+1)$ を

$$h_k(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}) = x_k$$

によって定義する．この $h_k\colon S^m \to \mathbb{R}$ が C^∞ 級関数であることを，問題 15 に出てきた立体射影で定義される座標近傍系 $\mathscr{T} = \{(U, \varphi), (V, \psi)\}$ を用いて確かめよ．

23. m, k を正整数とする．m 次元球面 $S^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$ と $m+k$ 次元球面 $S^{m+k} \subset \mathbb{R}^{m+k+1}$ に対し，次の式で定義される単射 $i\colon S^m \to S^{m+k}$ を考える：

$$i(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}) = (x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \underbrace{0, \dots, 0}_{k\text{ 個}}).$$

この $i\colon S^m \to S^{m+k}$ が C^∞ 級写像であることを示せ．

24. m 次元球面 $S^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$ 上の任意の C^∞ 級関数 $f\colon S^m \to \mathbb{R}$ に対し，$\mathbb{R}^{m+1}$ 上の C^∞ 級関数 $\tilde{f}\colon \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}$ であって $\tilde{f}|_{S^m} = f$ を満たすようなものが存在することを証明せよ．［ヒント：1 の分割について学んでから戻ってきたほうがよいかもしれない．］

微分可能な関数・写像についての基本事項

25. （『多様体の基礎』問題 7.4．写像の微分可能性の局所性）
 $0 \le s \le r \le \infty$ とする．M, N を C^r 級多様体とし，$\{W_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を M の開被覆とする．このとき，写像 $f\colon M \to N$ について，f を各々の W_λ に制限した $f|_{W_\lambda}\colon W_\lambda \to N$ が C^s 級なら，もとの f も C^s 級である．このことを証明せよ．

26. $0 \le s \le r \le \infty$ とする．M を C^r 級多様体とし，$f\colon M \to \mathbb{R}$ および $g\colon M \to \mathbb{R}$ を M 上の C^s 級関数とする．そのとき，$f+g\colon M \to \mathbb{R}$ および $fg\colon M \to \mathbb{R}$ を

$$(f+g)(p) = f(p) + g(p), \qquad (fg)(p) = f(p)g(p), \qquad p \in M$$

によって定義すれば，$f+g, fg$ もやはり M 上の C^s 級関数であることを証明せよ．（したがって，M 上の C^s 級関数全体の集合は可換環をなす[*]．）

---

[*] 単位元もある（それはどんな関数か？）．

陰関数定理と $\mathbb{R}^m$ の部分多様体

球面 S^m についての理解を深め，また次回以降で多様体の例をもっとたくさん挙げるため，講義では後のほうで出てくる（かもしれない）内容を，特別な場合に限定して先取りする．

m, n を正整数とし，$m > n$ とする．m 次元 C^∞ 級多様体 M の部分集合 N について，N が M の n 次元 C^∞ 級**部分多様体**であるとは，N の任意の点 p に対し，p を含む M の C^∞ 級座標近傍 $(U, \varphi) = (U; x_1, \dots, x_m)$ であって，$U \cap N = \{ q \in U \mid x_{n+1}(q) = \cdots = x_m(q) = 0 \}$ が成り立つようなものが存在することをいう．（問題 17 では $m - n$ が 1 の場合について触れた．）

N が M の n 次元 C^∞ 級部分多様体であるとき，N はそれ自身，n 次元 C^∞ 級多様体になる．これは『多様体の基礎』の命題 12.2 にある．座標近傍系がどのように得られるかについては，この命題 12.2 の証明を参照すること．

さて，$f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^r$ を C^∞ 級写像とし，$N = f^{-1}(\boldsymbol{o})$ とする．N の任意の点 p において，f の Jacobi 行列 $(Jf)_p$ の階数は r であると仮定しよう．そのとき，N は $\mathbb{R}^m$ の $m - r$ 次元 C^∞ 級部分多様体になる．これは陰関数定理からの帰結である．（『多様体の基礎』定理 15.1 の特別な場合．）

27. S^m が $\mathbb{R}^{m+1}$ の m 次元 C^∞ 級部分多様体であること（問題 17）について，上記の内容を適用することにより説明せよ．［ヒント：$f(\boldsymbol{x}) = 1 - \|\boldsymbol{x}\|^2$ とおくと，$S^m = f^{-1}(0)$ である．］

28. （『多様体の基礎』問題 12.4）
    $\mathbb{R}^m$ 上の C^∞ 級関数 f のグラフが $\mathbb{R}^{m+1}$ の m 次元 C^∞ 級部分多様体であることを示せ．

Riemann 球面，複素解析との関連

球面 $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ を **Riemann 球面** $\hat{\mathbb{C}}$ と見なす．すなわち，$U = S^2 \setminus \{ (0,0,1) \}, V = S^2 \setminus \{ (0,0,-1) \}$ を，『多様体の基礎』49 ページの例 5 にあるような $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}, \overline{\psi}\colon V \to \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ によってそれぞれ $\mathbb{C}$ と同一視する（71 ページの例 7 も参照のこと）．

U と同一視された $\mathbb{C}$ の点を一般に z で，V と同一視された $\mathbb{C}$ の点を一般に w で表し，2 枚の $\mathbb{C}$ そのものを，区別のために $\mathbb{C}_z, \mathbb{C}_w$ と表す．$U \cap V$ はいずれの $\mathbb{C}$ においても $\mathbb{C} \setminus \{ 0 \}$ と同一視されている．座標変換の写像 $\overline{\psi} \circ \varphi^{-1}\colon \mathbb{C}_z \setminus \{ 0 \} \to \mathbb{C}_w \setminus \{ 0 \}, \varphi \circ \overline{\psi}^{-1}\colon \mathbb{C}_w \setminus \{ 0 \} \to \mathbb{C}_z \setminus \{ 0 \}$ はそれぞれ $\overline{\psi} \circ \varphi^{-1}(z) = 1/z, \varphi \circ \overline{\psi}^{-1}(w) = 1/w$ で与えられる．

なお $\overline{\psi} \circ \varphi^{-1}, \varphi \circ \overline{\psi}^{-1}$ はいずれも，C^∞ 級であるだけではなく，正則である．（その意味で，Riemann 球面 $S^2 = \hat{\mathbb{C}}$ は 1 次元複素多様体であるという．）したがって，$\hat{\mathbb{C}}$ の開集合で定義された複素数値関数について，正則性の概念が自然に定義される．

29. （『多様体の基礎』問題 7.2）
    $f(z) = 1/z$ により定義される写像 $f\colon \mathbb{C}_z \to \mathbb{C}_z \setminus \{ 0 \}$ が，Riemann 球面の間の C^∞ 級写像 $\tilde{f}\colon \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ に一意的に拡張されることを証明せよ．

30. （Liouville の定理）
    $\mathbb{C}$ 全体で定義された正則関数 f を考える．もし f が有界ならば f は実際には定数関数であることを，次のようにして示せ．まず $f\colon \mathbb{C}_z \to \mathbb{C}$ と見なす．f が $\hat{\mathbb{C}}$ 全体で定義された正則関数 $\hat{f}\colon \hat{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ に拡張されることを，Riemann の除去可能特異点定理を用いて示す．$\hat{\mathbb{C}}$ のコンパクト性と正則関数の最大値原理によって，f が定数であることを結論する．