§4　古典群*

$M(n,\mathbb{R})$ を実数を成分とする $n\times n$ 行列全体のなす集合とする．これを $\mathbb{R}^{n^2}$ と同一視する（成分を並べる順番は本質的でない．どのように考えてもよい）．

$GL(n,\mathbb{R}) = \{\, A \in M(n,\mathbb{R}) \mid \det A \neq 0 \,\}$ と定める．$\det\colon A \mapsto \det A$ は $M(n,\mathbb{R})$ 上で定義された実数値連続関数だから，$GL(n,\mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R}\setminus\{\,0\,\})$ は $M(n,\mathbb{R})$ の開部分集合である．よって $GL(n,\mathbb{R})$ は C^∞ 級多様体になっている．

さらに，$GL(n,\mathbb{R})$ は同時に群でもある．しかも，積 $(g,h)\mapsto gh$ および逆元を取る操作 $g\mapsto g^{-1}$ はいずれも C^∞ 級写像になっている（今の場合，これは「行列の積や逆行列の各成分は，もとの行列の成分の C^∞ 級関数として表される」ということにほかならない）．その意味で，$GL(n,\mathbb{R})$ は **Lie 群** (Lie group) である．

さらに Lie 群の例を挙げよう．§3 の「陰関数定理と $\mathbb{R}^m$ の部分多様体」の項に載っている説明を参考にして，以下の問題に答えよ．問題 32, 36, 37 については，$n = 2, 3$ の場合を証明できたら，それだけでも発表してよい．

31. $SL(n,\mathbb{R}) = \{\, A \in M(n,\mathbb{R}) \mid \det A = 1 \,\}$ が $M(n,\mathbb{R})$ の C^∞ 級部分多様体であることを示せ．

32. $O(n) = \{\, A \in M(n,\mathbb{R}) \mid {}^t\!AA = E \,\}$ が $M(n,\mathbb{R})$ の C^∞ 級部分多様体であることを示せ．

33. $SO(n) = O(n)\cap SL(n,\mathbb{R})$ が $O(n)$ の開部分集合であることを示せ（したがって $SO(n)$ も C^∞ 級多様体である）．

34. $SO(2)$ が円周 S^1 と C^∞ 級微分同相であることを示せ．

$M(n,\mathbb{C})$ を複素数を成分とする $n\times n$ 行列全体のなす集合とする．これを $\mathbb{R}^{2n^2}$ と同一視する．$GL(n,\mathbb{C}) = \{\, A \in M(n,\mathbb{C}) \mid \det A \neq 0 \,\}$ は $M(n,\mathbb{C})$ の開部分集合である．

35. $SL(n,\mathbb{C}) = \{\, A \in M(n,\mathbb{C}) \mid \det A = 1 \,\}$ が $M(n,\mathbb{C})$ の C^∞ 級部分多様体であることを示せ．

36. $U(n) = \{\, A \in M(n,\mathbb{C}) \mid A^*A = E \,\}$ が $M(n,\mathbb{C})$ の C^∞ 級部分多様体であることを示せ．

37. $SU(n) = U(n)\cap SL(n,\mathbb{C})$ が $M(n,\mathbb{C})$ の C^∞ 級部分多様体であることを示せ．

38. $SU(2)$ が 3 次元球面 S^3 と C^∞ 級微分同相であることを示せ．

次の 2 問は多様体論ではなく位相空間論の問題である．$GL_+(n,\mathbb{R})$ と $SO(n)$ はどちらも局所弧状連結だから，問題 9 によって，これらの連結性と弧状連結性は同値であることに注意せよ．

39. $GL_+(n,\mathbb{R}) = \{\, A \in M(n,\mathbb{R}) \mid \det A > 0 \,\}$ が（弧状）連結であることを示せ．［ヒント：数学的帰納法を用いるのがよいと思う．］

40. $SO(n)$ が（弧状）連結であることを示せ．［ヒント：たとえば，問題 40 の結果と Gram–Schmidt の直交化法を用いる．］

---

*今回は発展的な話題を取りあげます．