§5　接ベクトル空間，写像の微分

接ベクトル空間に関する基本事項

41. （『多様体の基礎』問題 8.3．すべての接ベクトルは速度ベクトルとして表される）
M を C^r 級多様体とし，$p \in M$ とする．接ベクトル空間 $T_p(M)$ の任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ に対し，ある C^r 級曲線 $(-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ が存在して，$c(0) = p$, $\left.\dfrac{dc}{dt}\right|_{t=0} = \boldsymbol{v}$ となることを証明せよ．［ヒント：89〜90 ページの説明を一般化する．］

42. （『多様体の基礎』86 ページの注意）
M を C^∞ 級多様体とし，$p \in M$ とする．このとき，接ベクトル空間 $T_p(M)$ は点 p における方向微分全体の集合 $D_p^\infty(M)$ に一致することを証明せよ．

球面 S^m の接ベクトル空間

43. m 次元球面 $S^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$ において，問題 15 に出てきた，立体射影による C^∞ 級座標近傍系 $\{(U,\varphi),(V,\psi)\}$ を考える．(U,φ) によって $U = S^m \setminus \{p_{+1}\}$ に局所座標系 $(y_1,\dots,y_m)$ を入れ*，(V,ψ) によって $V = S^m \setminus \{p_{-1}\}$ に局所座標系 $(\tilde{y}_1,\dots,\tilde{y}_m)$ を入れる．
$U \cap V$ すなわち $S^m \setminus \{p_{+1}, p_{-1}\}$ の点 p をとる．点 p における接ベクトル空間 $T_p(S^m)$ を考えると，
$$\left\langle \left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial y_2}\right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial y_m}\right)_p \right\rangle \quad \text{および} \quad \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{y}_1}\right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{y}_2}\right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{y}_m}\right)_p \right\rangle$$
はいずれも $T_p(S^m)$ の基底である．$\left(\dfrac{\partial}{\partial y_i}\right)_p$ を $\left(\dfrac{\partial}{\partial \tilde{y}_1}\right)_p, \left(\dfrac{\partial}{\partial \tilde{y}_2}\right)_p, \dots, \left(\dfrac{\partial}{\partial \tilde{y}_m}\right)_p$ の一次結合として表せ．ただし係数は p における $\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \dots, \tilde{y}_m$ の値（それらを単に $\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \dots, \tilde{y}_m$ と書いてしまってよい）を用いた表示にすること．

44. （『多様体の基礎』問題 8.2）
2 次元球面 $S^2 = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\boldsymbol{x}\| = 1\}$ を考える．S^2 上の曲線 $c\colon \mathbb{R} \to S^2$ を
$$c(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t, \frac{1}{\sqrt{2}}\sin t, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \in \mathbb{R}^3$$
によって定義する．立体射影による S^2 の C^∞ 級座標近傍系 $\{(U,\varphi),(V,\psi)\}$ を用いる．(U,φ) によって，$U = S^2 \setminus \{(0,0,1)\}$ に局所座標系 (y_1, y_2) を入れる．曲線 c は点 $(0,0,1)$ を通らないから，c の像 $c(\mathbb{R})$ は U に部分集合として含まれていることに注意しよう．
(1)　$c(t)$ を (y_1, y_2) を用いて座標表示せよ．
(2)　$\dfrac{dc}{dt}$ を，一般的な t の値に対して，$\left(\dfrac{\partial}{\partial y_1}\right)_{c(t)}, \left(\dfrac{\partial}{\partial y_2}\right)_{c(t)}$ の一次結合として表せ．

---
*つまり，φ の第 1 成分，……，第 m 成分を与える U 上の関数をそれぞれ $y_1, \dots, y_m$ と書く．

45.　（Mercator 図法）

2 次元球面 $S^2 = \{\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\boldsymbol{x}\| = 1 \,\}$ の立体射影による C^∞ 級座標近傍系 $\{\, (U, \varphi), (V, \psi) \,\}$ を考える．さらに，$W = \{\, \boldsymbol{x} \in S^2 \mid x_1 > 0 \,\}$ とおいて，$\chi\colon W \to (-\pi/2, \pi/2) \times \mathbb{R}$ を

$$\chi(x_1, x_2, x_3) = \left(\tan^{-1}\frac{x_2}{x_1}, \tanh^{-1} x_3\right)$$

で定義する．ただしここで，$\tan^{-1}$ は $\tan\colon (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$ の逆関数．また $\tanh^{-1}$ は双曲正接（ハイパボリック・タンジェント） $\tanh\colon \mathbb{R} \to (-1, 1), \tanh(s) = (e^s - e^{-s})/(e^s + e^{-s})$ の逆関数である．

(1)　(W, χ) は S^2 の C^∞ 級座標近傍である（『多様体の基礎』54 ページに述べられている意味で）．言い換えると，$\{\, (U, \varphi), (V, \psi), (W, \chi) \,\}$ も S^2 の C^∞ 級座標近傍系になっている．そのことを確かめよ（「言い換え」の正当性は確かめなくてもよい）．

(2)　(U, φ) によって $U = S^2 \setminus \{\, (0, 0, 1) \,\}$ に局所座標系 (y_1, y_2) を入れ，(W, χ) によって W に局所座標系 (z_1, z_2) を入れる．$U \cap W\ (= W)$ の点 p をとる．点 p における S^2 の接ベクトル $\left(\dfrac{\partial}{\partial z_1}\right)_p, \left(\dfrac{\partial}{\partial z_2}\right)_p$ を $\left(\dfrac{\partial}{\partial y_1}\right)_p, \left(\dfrac{\partial}{\partial y_2}\right)_p$ の一次結合として表せ．ただし係数は p における y_1, y_2 の値を用いた表示にすること．

なお，座標近傍系のことを**アトラス**（atlas，地図帳），座標近傍のことを**チャート**（chart，地図――海図と言うべきかもしれない）と呼ぶこともある．

写像の微分

46.　（『多様体の基礎』問題 9.1）

$f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ を，$f(z) = z(z+1)$ で定義される写像とする．

(1)　$z = x + \sqrt{-1}\, y$ によって $\mathbb{C}$ に座標 (x, y) を入れ，f を座標表示せよ．

(2)　一般の点 z において，f の Jacobi 行列 $(Jf)_z$ を求めよ．$T_z(\mathbb{C})$ の基底 $\left\langle \left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)_z, \left(\dfrac{\partial}{\partial y}\right)_z \right\rangle$ を用いること．

(3)　微分 $(df)_z\colon T_z(\mathbb{C}) \to T_{f(z)}(\mathbb{C})$ が同型でない z をすべて求めよ．

47.　前問の $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ について引き続き考察する．

Riemann 球面 $\hat{\mathbb{C}}$ を考える．すなわち，『多様体の基礎』49 ページの例 5 にあるように[*]，$\hat{\mathbb{C}}$ とは S^2 であって，$U = S^2 \setminus \{\, (0, 0, 1) \,\}$ が $\mathbb{C}_z$ と，$V = S^2 \setminus \{\, (0, 0, -1) \,\}$ が $\mathbb{C}_w$ と同一視されている（$\mathbb{C}_z, \mathbb{C}_w$ はいずれも $\mathbb{C}$ そのものだが，区別のために違う記号を用いている）．U 上にない $\hat{\mathbb{C}}$ の唯一の点を ∞ と書く．

(1)　f を $\mathbb{C}_z$ から $\mathbb{C}_z$ への写像と見なす．そのとき，f は連続写像 $\tilde{f}\colon \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ に拡張でき，$\tilde{f}(\infty) = \infty$ となることを証明せよ．さらに，$\tilde{f}$ が C^∞ 級写像であることを証明せよ．

(2)　微分 $(d\tilde{f})_\infty\colon T_\infty(\hat{\mathbb{C}}) \to T_\infty(\hat{\mathbb{C}})$ は同型だろうか．判定せよ．

[*] 71 ページの例 7，および演義プリント §3 の「Riemann 球面，複素解析との関連」の項も参照のこと．