§6 写像の微分（追加）

合成写像の微分，微分同相による次元の不変性

48. （『多様体の基礎』命題 9.6．合成写像の微分）
M, N, Q を C^r 級多様体とし，$f\colon M \to N, g\colon N \to Q$ を C^r 級写像とする $(1 \le r \le \infty)$. そのとき，任意の点 $p \in M$ において，合成写像 $g \circ f$ の微分

$$(d(g \circ f))_p\colon T_p(M) \to T_{g(f(p))}(Q)$$

は，写像の微分の合成

$$(dg)_{f(p)} \circ (df)_p\colon T_p(M) \to T_{g(f(p))}(Q)$$

に一致することを示せ．

問題 48 から次のことがわかる：M, N を C^r 級多様体とし，$f\colon M \to N$ を C^r 級写像とする $(1 \le r \le \infty)$ とき，f が C^r 級微分同相写像であれば，任意の $p \in M$ において，微分 $(df)_p$ は線型同型写像である．特に，$\dim M = \dim N$ でなければならない．

この最後の結論を，「次元は C^r 級多様体の『C^r 級微分同相不変量』である」と言い表すこともできる．つまり，C^r 級多様体 M の次元は，M の属する C^r 級微分同相類（「C^r 級微分同相」という同値関係による同値類）だけによって決まっているということ．

「C^r 級」の仮定を外し，M, N を単なる位相多様体，$f\colon M \to N$ を同相写像だと仮定しただけでも $\dim M = \dim N$ であることは証明できる．しかしそれは格段に難しい．位相空間のホモロジーの理論を用いるのが普通（だと思う）．

写像の微分

49. m, k を正整数とする．m 次元球面 $S^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$ と $m+k$ 次元球面 $S^{m+k} \subset \mathbb{R}^{m+k+1}$ に対し，問題 23 で扱った次の写像 $f\colon S^m \to S^{m+k}$ を考える：

$$f(x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}) = (x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{k\text{ 個}}).$$

任意の点 $p \in S^m$ において，微分 $(df)_p\colon T_p(S^m) \to T_{f(p)}(S^{m+k})$ の階数が m（同じことだが，$(df)_p$ は単射）であることを確かめよ．

50.　（Hopf 写像）

3 次元球面 $S^3 = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2+y^2+z^2+w^2=1\}$ と 2 次元球面 $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=1\}$ に対し，$f\colon S^3 \to S^2$ を次のように定義する：

$$f(x,y,z,w) = (2(xz+yw), 2(xw-yz), z^2+w^2-x^2-y^2).$$

(1)　f が S^3 から S^2 への写像を与えていることを確かめよ．また，$f\colon S^3 \to S^2$ が C^∞ 級写像であることを証明せよ．

(2)　点 $p = (1,0,0,0) \in S^3$ において微分 $(df)_p$ の階数が 2（同じことだが，$(df)_p$ は全射）であることを確かめよ．

ここで取り上げた Hopf 写像は，射影空間（正確には複素射影空間）について学ぶともっと明快に記述できる．実は任意の点 $p \in S^3$ において $(df)_p$ の階数は 2 になっている．