§7　射影空間

m 次元射影空間[*] $\mathbb{P}^m$

次のように定義される写像 $\pi\colon \mathbb{R}^{m+1}\setminus\{\boldsymbol{o}\}\to\mathbb{P}^m$ を**自然な射影**と呼ぶことにする：

$$\pi(\boldsymbol{x}) = (\text{ 原点および } \boldsymbol{x} \text{ を通る } \mathbb{R}^{m+1} \text{ の直線 }) \in \mathbb{P}^m. \tag{$*$}$$

上記の定義は，$\mathbb{P}^m$ を $\mathbb{R}^{m+1}$ の原点を通る直線全体の集合とみなす立場から行ったものである．$\mathbb{P}^m$ を，$\mathbb{R}^{m+1}\setminus\{\boldsymbol{o}\}$ の同値関係 $\sim$ による商集合 $(\mathbb{R}^{m+1}\setminus\{\boldsymbol{o}\})/{\sim}$ とみなす立場もある．ただし

$$\boldsymbol{x}\sim\boldsymbol{y} \overset{\text{def}}{\iff} \exists\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\} \text{ s.t. } \boldsymbol{y}=\lambda\boldsymbol{x}.$$

この立場から言えば，π とは商写像そのものである．

51.　上記の二つの考え方は，実質的には同じものである．そのことを明確に説明したい．本問では，両者をいったん区別するため，$\mathbb{R}^{m+1}$ の原点を通る直線全体の集合のことを $\mathbb{P}^m$ という記号で表し，商集合 $(\mathbb{R}^{m+1}\setminus\{\boldsymbol{o}\})/{\sim}$ のことを $\tilde{\mathbb{P}}^m$ で表すことにする．

　$\mathbb{P}^m$ と $\tilde{\mathbb{P}}^m$ をどのようにして同一視すべきか説明せよ．また，同一視を与える全単射を $\Phi\colon\mathbb{P}^m\to\tilde{\mathbb{P}}^m$ とするとき，Φ が次の性質を持つことを確かめよ：「$\mathbb{R}^{m+1}\setminus\{\boldsymbol{o}\}$ から $\mathbb{P}^m$ への自然な射影 $(*)$ を π とし，商写像 $\mathbb{R}^{m+1}\setminus\{\boldsymbol{o}\}\to\tilde{\mathbb{P}}^m$ を $\tilde{\pi}$ とするとき，$\tilde{\pi}=\Phi\circ\pi$ が成り立つ」．

自然な射影 $\pi\colon\mathbb{R}^{m+1}\setminus\{\boldsymbol{o}\}\to\mathbb{P}^m$ を m 次元球面 $S^m=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^{m+1}\mid\|\boldsymbol{x}\|=1\}$ に制限した写像のことも，$\pi\colon S^m\to\mathbb{P}^m$ と書き，自然な射影と呼ぶ．したがって単に「自然な射影」と言うと（書くと）混乱が生じる可能性があるので，以下では定義域を明確に示すことによって区別する．

52.　（『多様体の基礎』問題 11.1）

　自然な射影 $\pi\colon\mathbb{R}^{m+1}\setminus\{\boldsymbol{o}\}\to\mathbb{P}^m$ は開写像である．すなわち，W が $\mathbb{R}^{m+1}\setminus\{\boldsymbol{o}\}$ の開集合なら，π による W の像 $\pi(W)$ は $\mathbb{P}^m$ の開集合である．これは『多様体の基礎』に系 11.1.1 として述べられているが，議論が省略されている箇所があるので，それを補いながら証明を説明せよ．

53.　$\mathbb{P}^m$ は連結か．また，$\mathbb{P}^m$ はコンパクトか．理由とともに答えよ．

54.　（『多様体の基礎』問題 11.2）

　自然な射影 $\pi\colon S^m\to\mathbb{P}^m$ の微分 $(d\pi)_p\colon T_p(S^m)\to T_{\pi(p)}(\mathbb{P}^m)$ について調べよう．好きな点 $p\in S^m$ を一つ与え，その p について $(d\pi)_p$ が線型同型写像であることを示せ．［コメント：出題の仕方からわかるように，実は任意の点 $p\in S^m$ において $(d\pi)_p$ は線型同型写像.］

---

[*]われわれの間には主に実多様体を扱うという暗黙の了解があるので，ここでは単に「射影空間」と呼び $\mathbb{P}^m$ という記号を用いるが，「複素射影空間」その他が存在することを考慮して，「実射影空間」と呼び $\mathbb{RP}^m$ などと書く場合も多い．

射影変換

55. $m+1$ 次正則行列 $A \in GL(m+1,\mathbb{R})$ に対し，写像 $f_A\colon \mathbb{P}^m \to \mathbb{P}^m$ を次のように定義する：

$$f_A([\boldsymbol{x}]) = [A\boldsymbol{x}], \qquad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{m+1} \setminus \{\, \boldsymbol{o} \,\}.$$

ただしここでは $\mathbb{P}^m$ を商集合 $(\mathbb{R}^{m+1} \setminus \{\, \boldsymbol{o} \,\})/\sim$ とみなす立場をとっており，記号 $[\boldsymbol{x}]$ は $\boldsymbol{x}$ の $\sim$ に関する同値類を表している．f_A を，正則行列 A の定める $\mathbb{P}^m$ 上の**射影変換**と呼ぶ．

(1) 写像 $f_A\colon \mathbb{P}^m \to \mathbb{P}^m$ が well-defined であることを示せ．

(2) 2 つの行列 $A, B \in GL(m+1,\mathbb{R})$ の定める射影変換 f_A, f_B が一致するための，A, B に関する必要十分条件を与えよ．

56. 任意の正則行列 $A \in GL(m+1,\mathbb{R})$ に対し，A の定める射影変換 $f_A\colon \mathbb{P}^m \to \mathbb{P}^m$ が C^∞ 級微分同相写像であることを示せ．

射影閉包と 2 次曲線

57. 写像 $\varphi\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{P}^m$ を，自然な射影 $\pi\colon \mathbb{R}^{m+1} \setminus \{\, \boldsymbol{o} \,\} \to \mathbb{P}^m$ を用いて次のように定義する：

$$\varphi(x_1, \dots, x_m) = \pi(1, x_1, \dots, x_m).$$

φ が $\mathbb{R}^m$ から $\varphi(\mathbb{R}^m)$ への C^∞ 級微分同相写像を与えること（ここで $\varphi(\mathbb{R}^m)$ を $\mathbb{P}^m$ の開部分多様体とみなしている），また $\varphi(\mathbb{R}^m)$ が $\mathbb{P}^m$ の稠密な部分集合であることを示せ．

問題 57 により，$\mathbb{R}^m$ 自身を $\mathbb{P}^m$ の稠密な開部分多様体とみなしてしまう．

58. $\mathbb{R}^2$ 内の円 $C_1\colon x^2 + y^2 = 1$，放物線 $C_2\colon y = x^2$，双曲線 $C_3\colon x^2 - y^2 = 1$ を考える．上述のようにして C_i $(i = 1, 2, 3)$ を $\mathbb{P}^2$ の部分集合とみなす．$\mathbb{P}^2$ における C_i の閉包を C_i の**射影閉包**と呼び，ここでは $\tilde{C}_i$ で表す．

任意の i, j に対し，ある正則行列 $A \in GL(3,\mathbb{R})$ が存在して $\tilde{C}_j = f_A(\tilde{C}_i)$ となることを示せ．ただし，f_A は A の定める射影変換 $\mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ である．（このことを指して，$\tilde{C}_i$ と $\tilde{C}_j$ は**射影同値**であるという．）

［ヒント：自然な射影 $\pi\colon \mathbb{R}^3 \setminus \{\, \boldsymbol{o} \,\} \to \mathbb{P}^2$ に関する逆像 $\pi^{-1}(\tilde{C}_i), \pi^{-1}(\tilde{C}_j)$ を考察する．］

複素射影空間

59. （『多様体の基礎』問題 11.3）

複素射影空間 $\mathbb{CP}^m$ に対しても，自然な射影 $\pi\colon S^{2m+1} \to \mathbb{CP}^m$ がある．その定義を説明し，π が C^∞ 級写像であることを示せ．

60. （『多様体の基礎』問題 11.4）

自然な射影 $\pi\colon S^3 \to \mathbb{CP}^1$ について考える．ここで $S^3 = \{\, (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1 \,\}$ である．$\mathbb{C}$ を $z \mapsto (1 : z)$ により $\mathbb{CP}^1$ の開部分多様体とみなし，そうして $\mathbb{CP}^1 = \mathbb{C} \cup \{\, \infty \,\}$ と考えると，さらに立体射影 $\varphi\colon S^2 \setminus \{\, (0,0,1) \,\} \to \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ を用いることで $\mathbb{CP}^1$ は $S^2 = \{\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1 \,\}$ と同一視される．この同一視のもとで，π は $(z_1, z_2) \in S^3$ をどんな $(x, y, z) \in S^2$ にうつすか求めよ．（そして問題 50 と比較せよ．）