§8 ここまでの内容に関する補充問題

このプリントの問題については，過去に 1 問も解答を発表していない人のみ，発表を認めます．まずは多様体の最も基本的な例から．

61. 円周 $S^1 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1 \}$ は 1 次元 C^∞ 級多様体になる．座標近傍系の定め方を説明し（方法は一通りではない．好きな方法を採用すればよい．以下の問題でも同様），それが実際に C^∞ 級座標近傍系になっていることを証明せよ．

62. 球面 $S^2 = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1 \}$ は 2 次元 C^∞ 級多様体になる．座標近傍系の定め方を説明し，それが実際に C^∞ 級座標近傍系になっていることを証明せよ．

ある位相空間 M が多様体に**ならない**としたら，どういう事情があり得るか．問題 10 で取りあげた空間のように Hausdorff でない場合というのが一つ．他にも，次のような状況もある[*]．

63. $\mathbb{R}^2$ の部分空間 $X = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| = |y| \}$ はいかなる次元の位相多様体でもない．理由を説明せよ．［ヒント：原点 $(0, 0) \in X$ を含むような座標近傍は存在し得るか．］

基本的な多様体の例として，Euclid 空間 $\mathbb{R}^m$，球面 S^m のほかに射影空間（実射影空間）$\mathbb{P}^m$ があった．

64. 1 次元射影空間（射影直線）$\mathbb{P}^1$ の座標近傍系の定め方を説明し，それが実際に C^∞ 級座標近傍系になっていることを証明せよ．

65. 2 次元射影空間（射影平面）$\mathbb{P}^2$ の座標近傍系の定め方を説明し，それが実際に C^∞ 級座標近傍系になっていることを証明せよ．

66. $\pi\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{ \boldsymbol{o} \} \to \mathbb{P}^1$ を自然な射影とする．$S^1 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1 \}$ から $\mathbb{P}^1$ への写像 $f\colon S^1 \to \mathbb{P}^1$ を $f(\cos\theta, \sin\theta) = \pi(\cos(\theta/2), \sin(\theta/2))$ によって定義する．
   (1) $f\colon S^1 \to \mathbb{P}^1$ が well-defined であることを示せ．
   (2) $f\colon S^1 \to \mathbb{P}^1$ が C^∞ 級微分同相写像であることを示せ．

一般的な「多様体を構成する手続き」も大切である．与えられた多様体の開部分集合もそれ自身多様体とみなすことができて，それを「開部分多様体」と呼んだのだった．また，2 つの多様体の積空間を多様体と考えることもでき，それを「積多様体」と呼ぶ．具体例で振り返ってみる．

67. 円周 S^1 を 1 次元 C^∞ 級多様体とみなし，積多様体 $T^2 = S^1 \times S^1$ を考える（2 次元トーラス）．$S^1 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1 \}$ と考えれば T^2 は $\mathbb{R}^4$ の部分集合である．そのように考えた上で，T^2 の C^∞ 級座標近傍系 $\mathscr{S}$ の定め方を具体的に記述せよ．

---

[*] 問題 10 や問題 62 で挙げたのは，位相多様体にならないような位相空間の例である．当然，「微分可能多様体にならないような位相多様体は存在するか」というのも問題になる．答えはイエスで，Kervaire が 1960 年に 10 次元の例を作った．数学的な“空間”の概念は「位相空間」「位相多様体」「微分可能多様体」の順にだんだんと“整備された”ものになっていくわけだが，途中で抜け落ちていくものもあるということ．現時点で一般的な“空間”概念の枠組みは，将来にわたって適切なものとは限らない．そういうことを検討するのが幾何学（の一側面）である．

位相多様体の定義に関連して，考えをめぐらせてみる．言葉を適切に使う練習．

68. M を m 次元位相多様体とし，(U, φ) を M の座標近傍とする．

(1) V を U の開集合とするとき，$(V, \varphi|_V)$ も M の座標近傍であることを示せ．

(2) W を U の閉集合とする．そのとき，W は M の閉集合であるといえるか．

69. M を m 次元位相多様体とする．$(U, \varphi), (V, \psi)$ を M の 2 つの座標近傍とし，$U \cap V \neq \emptyset$ であり，かつ，任意の $p \in U \cap V$ に対し $\varphi(p) = \psi(p)$ であると仮定する．次のように写像 $\chi \colon U \cup V \to \varphi(U) \cup \psi(V) \subset \mathbb{R}^m$ を定義する：

$$\chi(p) = \begin{cases} \varphi(p), & p \in U, \\ \psi(p), & p \in V. \end{cases}$$

(1) χ が連続写像であることを示せ．

(2) $(U \cup V, \chi)$ は必ずしも M の座標近傍にはならない．反例を挙げよ．［ヒント：M として $\mathbb{R}^2$ を考えるのがよいか．］

70. M を m 次元位相多様体，$\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ をその座標近傍系とし，添字集合 A は 2 個以上の元を持つとする．M が連結ならば，どんな $\alpha \in A$ についても，α とは異なるある $\beta \in A$ が存在し $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ となることを示せ．

どのような微分可能多様体を“同じもの”とみなすかということに関連して，「極大座標近傍系」という概念があった．やや難しいが大切なことである．『多様体の基礎』にある説明がわかりづらいかもしれないので，以下のように補足する．

M を m 次元 C^r 級多様体とし，$\mathscr{S} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ をその C^r 級座標近傍系とする．M に（$\mathscr{S}$ とは無関係に）与えられた座標近傍 (V, ψ) について，$\mathscr{S}' = \mathscr{S} \cup \{(V, \psi)\}$ が再び M の C^r 級座標近傍系となるとき，(V, ψ) は $\mathscr{S}$ に**許容される**と言うことにしよう．

71. （『多様体の基礎』演習問題 6.3[*]）

$M, \mathscr{S}$ を上述の通りとする．『多様体の基礎』53〜54 ページに述べられている C^r 級極大座標近傍系 $\mathscr{M}(\mathscr{S})$ は，$\mathscr{S}$ に許容されるすべての M の座標近傍からなる集合に一致する．そのことを示せ．

『多様体の基礎』における用語法では，C^r 級座標近傍系 $\mathscr{S}$ で定義される C^r 級多様体 M に対し，$\mathscr{S}$ に許容されるような M の座標近傍 (V, ψ) のことを「C^r 級座標近傍」と呼んでいる（54 ページ）．次の問題はその用語法に従って考えること．問題 68 (1) との違いにも注意せよ．

72. M を m 次元 C^r 級多様体とし, (U, φ) を M の C^r 級座標近傍とする．V を U の開集合とするとき，$(V, \varphi|_V)$ も M の C^r 級座標近傍であることを示せ．

[*] 問題の表現の仕方はだいぶ違うが，実質的にそう．というのは，「許容される」ということの定義によって，(V, ψ) が $\mathscr{S} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ に許容されるためには，$U_\alpha \cap V \neq \emptyset$ であるような任意の $\alpha \in A$ について，座標変換

$$\varphi_\alpha \circ \psi^{-1} \colon \psi(U_\alpha \cap V) \to \varphi_\alpha(U_\alpha \cap V), \quad \psi \circ \varphi_\alpha^{-1} \colon \varphi_\alpha(U_\alpha \cap V) \to \psi(U_\alpha \cap V)$$

がいずれも C^r 級写像になることが必要十分だからである．