§9　逆関数の定理，陰関数の定理．正則点と臨界点

逆関数の定理，陰関数の定理の応用

73.　（『多様体の基礎』定理 10.5）

$f\colon M \to N$ を C^r 級写像とする．点 $p_0 \in M$ における微分 $(df)_{p_0}\colon T_{p_0}(M) \to T_{f(p_0)}(N)$ が単射ならば，p_0 のまわりの局所座標系 $(U, \varphi) = (U; x_1, \ldots, x_m)$ と $f(p_0)$ のまわりの局所座標系 $(V, \psi) = (V; y_1, \ldots, y_n)$ をうまく選ぶことにより，次のようにすることができる．

(i)　$\varphi(p_0) = \boldsymbol{o} \in \mathbb{R}^m, \psi(f(p_0)) = \boldsymbol{o} \in \mathbb{R}^n, f(U) \subset V$.

(ii)　任意の $p \in U$ に対し, $\varphi(p) = (x_1, \ldots, x_m)$ とおくと $\psi(f(p)) = (x_1, \ldots, x_m, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-m\ \text{個}})$.

このことを証明せよ．

74.　（『多様体の基礎』定理 10.3）

$f\colon M \to N$ を C^r 級写像とする．点 $p_0 \in M$ における微分 $(df)_{p_0}\colon T_{p_0}(M) \to T_{f(p_0)}(N)$ が全射ならば，p_0 のまわりの局所座標系 $(U, \varphi) = (U; x_1, \ldots, x_m)$ と $f(p_0)$ のまわりの局所座標系 $(V, \psi) = (V; y_1, \ldots, y_n)$ をうまく選ぶことにより，次のようにすることができる．

(i)　$\varphi(p_0) = \boldsymbol{o} \in \mathbb{R}^m, \psi(f(p_0)) = \boldsymbol{o} \in \mathbb{R}^n, f(U) \subset V$.

(ii)　任意の $p \in U$ に対し, $\varphi(p) = (x_1, \ldots, x_m)$ とおくと $\psi(f(p)) = (x_{m-n+1}, \ldots, x_m)$.

そのことを証明せよ．

以上の 2 問は，証明を詳細に述べるとたぶん相当長くなる．発表にあたっては，適度な長さにまとめること．

はめ込み (immersion)，**埋め込み** (embedding)，**沈め込み** (submersion) という概念がある．問題 73 は，はめ込みが局所的には埋め込みになることを示している（『多様体の基礎』命題 12.1 も参照）．問題 74 も「沈め込みが局所的には○○になることを示している」と説明できると良さそうだが，○○にどんな言葉をあてはめるのがいいか，迷う．「ファイバーバンドル」とするのが良いだろうか．

微分 df に関する概念	大域的概念
はめ込み	埋め込み
沈め込み	ファイバーバンドル

はめ込み，埋め込みについては各自調べよ（「埋め込み」という言葉の使い方は人によって少し異なるので注意せよ）．沈め込みとは，各点 $p \in M$ で微分 $(df)_p$ が全射であるような $f\colon M \to N$ のこと．

75.　ファイバーバンドル（ここでは微分可能ファイバーバンドルという意味）の概念について調べ，説明せよ（たとえば，森田茂之『微分形式の幾何学』を見よ）．また，ファイバーバンドル (E, π, B, F) に対し，射影 $\pi\colon E \to B$ が沈め込みであることを示せ．

次の 2 問では問題 74 の結果を用いる．

76. 問題 74 の結果を既知として，陰関数の定理を導け．

77. （『多様体の基礎』定理 15.1）
演義プリント §3 の「陰関数定理と $\mathbb{R}^m$ の部分多様体」の項における記述を思い出そう．以下では $1 \le r \le \infty$ とする．
m, n を正整数とし，$m > n$ とする．m 次元 C^r 級多様体 M の部分集合 N について，N が M の n 次元 C^r 級**部分多様体**であるとは，任意の $p \in N$ に対し，p を含む M の C^r 級座標近傍 $(U, \varphi) = (U; x_1, \dots, x_m)$ であって，$U \cap N = \{\, q \in U \mid x_{n+1}(q) = \cdots = x_m(q) = 0 \,\}$ が成り立つようなものが存在することを言った．（正確には，§3 で触れたのは $r = \infty$ の場合であったが．）
次のことを証明せよ．m, n を正整数とし，$m > n$ とする．M, N をそれぞれ m 次元，N 次元の C^r 級多様体として，$f\colon M \to N$ を C^r 級写像とし，点 $q \in N$ をとる．任意の点 $p \in f^{-1}(q)$ において微分 $(df)_p\colon T_p(M) \to T_q(N)$ は全射であると仮定する．そのとき $L = f^{-1}(q)$ は M の $m - n$ 次元 C^r 級部分多様体である．

正則点と臨界点

一般に，C^1 級写像 $f\colon M \to N$ について，点 $p \in M$ における微分 $(df)_p\colon T_p(M) \to T_{f(p)}(N)$ が全射のとき p は f の**正則点** (regular point) であるといい，全射でないとき p は f の**臨界点** (critical point) であるという．また点 $q \in N$ に対し，$f^{-1}(q)$ に属する点がすべて正則点であるとき q は f の**正則値** (regular value) であるといい，$f^{-1}(q)$ に属する臨界点が一つでもあれば q は f の**臨界値** (critical value) であるという．
問題 77 の結論は，$m > n$ のとき，正則値の逆像は部分多様体であるということを言っている．

78. （『多様体の基礎』演習問題 15.2）
$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ を $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ と定義する．これは C^∞ 級写像である．f の臨界値をすべて求めよ．また，各 $c \in \mathbb{R}$ に対し，$f^{-1}(c)$ とは $\mathbb{R}^3$ のどのような部分集合か，図を描いて説明せよ．

79. 2 次元球面 $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ において，関数 $h\colon S^2 \to \mathbb{R}$ および写像 $f\colon S^2 \to \mathbb{R}^2$ を

$$h(x, y, z) = z, \qquad f(x, y, z) = (x, y)$$

によって定義する．これらは C^∞ 級関数，C^∞ 級写像である（問題 22 も参照）．h の臨界点をすべて求めよ．また，f の臨界点をすべて求めよ．

80. 2 次元トーラス $T^2 = S^1 \times S^1$ を考える．$S^1 \subset \mathbb{R}^2$ と見なすと，T^2 の点 p は一般に $(\cos\theta, \sin\theta, \cos\varphi, \sin\varphi)$ と表すことができる．関数 $f\colon T^2 \to \mathbb{R}$ を

$$f(p) = (1 + \cos\theta)(1 + \cos\varphi), \qquad \text{ただし } p = (\cos\theta, \sin\theta, \cos\varphi, \sin\varphi)$$

によって定義する．f の臨界点をすべて求めよ．