# 第 4 回の講義の補足

行列の分割を用いた積の計算法（教科書 11 ページ参照）が正しいことを証明する．

$m \times n$ 行列 $A$ と $n \times r$ 行列 $B$ を次のように分割する：

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1t} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & A_{s2} & \cdots & A_{st} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1u} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2u} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{t1} & B_{t2} & \cdots & B_{tu} \end{pmatrix}.$$

ただし，ブロック $A_{\alpha\beta}$ は $m_\alpha \times n_\beta$ 型，ブロック $B_{\beta\gamma}$ は $n_\beta \times r_\gamma$ 型であるとする．証明すべきことは，積 $C = AB$（これは $m \times r$ 行列）を $m_\alpha \times r_\gamma$ 型のブロック $C_{\alpha\gamma}$ を用いて

$$C = AB = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1u} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2u} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{s1} & C_{s2} & \cdots & C_{su} \end{pmatrix}$$

と分割したとき，ブロック $C_{\alpha\gamma}$ が

$$C_{\alpha\gamma} = \sum_{\beta=1}^{t} A_{\alpha\beta} B_{\beta\gamma} \tag{$\star$}$$

で与えられるということである．

$A = (a_{ij}), B = (b_{jk})$ とおく．式 $(\star)$ の両辺の $(p, q)$ 成分（ただし $1 \leqq p \leqq m_\alpha, 1 \leqq q \leqq r_\gamma$）を $a_{ij}$, $b_{jk}$ を用いて表して，両者が等しいことを証明しよう．

左辺 $C_{\alpha\gamma}$ の $(p, q)$ 成分とは，積 $C = AB$ の $(m_1 + m_2 + \cdots + m_{\alpha-1} + p, r_1 + r_2 + \cdots + r_{\gamma-1} + q)$ 成分のことである[*]．行列の積の定義により

$$(C_{\alpha\gamma} \text{ の } (p,q) \text{ 成分}) = \sum_{j=1}^{n} a_{m_1+m_2+\cdots+m_{\alpha-1}+p,j}\, b_{j,r_1+r_2+\cdots+r_{\gamma-1}+q} \tag{$*$}$$

である[†]．一方で，

$$\begin{aligned}
(A_{\alpha\beta}B_{\beta\gamma} \text{ の } (p,q) \text{ 成分}) &= \sum_{l=1}^{n_\beta} (A_{\alpha\beta} \text{ の } (p,l) \text{ 成分})(B_{\beta\gamma} \text{ の } (l,q) \text{ 成分}) \\
&= \sum_{l=1}^{n_\beta} a_{m_1+m_2+\cdots+m_{\alpha-1}+p,\, n_1+n_2+\cdots+n_{\beta-1}+l}\, b_{n_1+n_2+\cdots+n_{\beta-1}+l,\, r_1+r_2+\cdots+r_{\gamma-1}+q} \\
&= \sum_{j=n_1+n_2+\cdots+n_{\beta-1}+1}^{n_1+n_2+\cdots+n_{\beta-1}+n_\beta} a_{m_1+m_2+\cdots+m_{\alpha-1}+p,j}\, b_{j,r_1+r_2+\cdots+r_{\gamma-1}+q}
\end{aligned}$$

---

[*] $\alpha = 1$ のときは「$m_1 + m_2 + \cdots + m_{\alpha-1}$」は 0 であると解釈してください．$\gamma = 1$ のときの「$r_1 + r_2 + \cdots + r_{\gamma-1}$」についても同様．

[†] 右辺の「$a_{m_1+m_2+\cdots+m_{\alpha-1}+p,j}$」や「$b_{j,r_1+r_2+\cdots+r_{\gamma-1}+q}$」について一言．行列の成分を添字を用いた記法で表すとき，われわれは行番号と列番号を原則的には続けて書く（「$a_{ij}$」のように）ことにしているが，それだと混乱が生じ得る場合には，このようにカンマを入れることがある．教科書 4 ページの例 9 で，クロネッカーのデルタについても同様のことが行われていますね．

だから

$$\begin{aligned}\left(\sum_{\beta=1}^{t} A_{\alpha\beta}B_{\beta\gamma}\ \text{の}\ (p,q)\ \text{成分}\right) &= \sum_{\beta=1}^{t}(A_{\alpha\beta}B_{\beta\gamma}\ \text{の}\ (p,q)\ \text{成分}) \\ &= \sum_{j=1}^{n} a_{m_1+m_2+\cdots+m_{\alpha-1}+p,j}b_{j,r_1+r_2+\cdots+r_{\gamma-1}+q} \qquad (**)\end{aligned}$$

である．(∗) と (∗∗) によって，式 (⋆) が正しいことがわかる．