第 6 回の演習問題

1. 次の置換の積を計算せよ．

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

2. 次の置換を互換の積に分解し，各々の置換の符号を求めよ．

(1) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$　(2) $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 7 & 4 & 1 & 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

3. $n \geq 2$ とし，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ を n 次列ベクトルとする．また $c_{11}, c_{12}, c_{21}, c_{22}$ を実数とする．行列式の列に関する多重線形性と交代性を用いて，次の等式を証明せよ．

$$\begin{aligned}&\det\left(c_{11}\boldsymbol{a}_1 + c_{21}\boldsymbol{a}_2 \quad c_{12}\boldsymbol{a}_1 + c_{22}\boldsymbol{a}_2 \quad \boldsymbol{a}_3 \quad \cdots \quad \boldsymbol{a}_n\right)\\ &= (c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}) \det\left(\boldsymbol{a}_1 \quad \boldsymbol{a}_2 \quad \boldsymbol{a}_3 \quad \cdots \quad \boldsymbol{a}_n\right)\\ &\quad + c_{11}c_{12} \det\left(\boldsymbol{a}_1 \quad \boldsymbol{a}_1 \quad \boldsymbol{a}_3 \quad \cdots \quad \boldsymbol{a}_n\right) + c_{21}c_{22} \det\left(\boldsymbol{a}_2 \quad \boldsymbol{a}_2 \quad \boldsymbol{a}_3 \quad \cdots \quad \boldsymbol{a}_n\right).\end{aligned}$$

（さらに，次回の講義で扱うように，実は

$$\det\left(\boldsymbol{a}_1 \quad \boldsymbol{a}_1 \quad \boldsymbol{a}_3 \quad \cdots \quad \boldsymbol{a}_n\right), \quad \det\left(\boldsymbol{a}_2 \quad \boldsymbol{a}_2 \quad \boldsymbol{a}_3 \quad \cdots \quad \boldsymbol{a}_n\right)$$

はいずれも 0 になる．よって最終的には第 1 項

$$(c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}) \det\left(\boldsymbol{a}_1 \quad \boldsymbol{a}_2 \quad \boldsymbol{a}_3 \quad \cdots \quad \boldsymbol{a}_n\right)$$

だけが残る．）

解答例

1.

$$(1)\quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad (2)\quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

2.

(1) たとえば $\sigma = (1\ 4)(1\ 2)(1\ 3)$. $\mathrm{sgn}(\sigma) = -1$.

(2) たとえば $\tau = (1\ 4)(1\ 3)(2\ 5)(2\ 6)(2\ 7)$. $\mathrm{sgn}(\tau) = -1$.

3. まず行列式の多重線形性を用いて

$$\begin{aligned}
&\det\begin{pmatrix} c_{11}\boldsymbol{a}_1 + c_{21}\boldsymbol{a}_2 & c_{12}\boldsymbol{a}_1 + c_{22}\boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix} \\
&= \det\begin{pmatrix} c_{11}\boldsymbol{a}_1 & c_{12}\boldsymbol{a}_1 + c_{22}\boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} c_{21}\boldsymbol{a}_2 & c_{12}\boldsymbol{a}_1 + c_{22}\boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix} \\
&= c_{11}\det\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & c_{12}\boldsymbol{a}_1 + c_{22}\boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix} + c_{21}\det\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_2 & c_{12}\boldsymbol{a}_1 + c_{22}\boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix} \\
&= c_{11}(c_{12}\det\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_3 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix} + c_{22}\det\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix}) \\
&\quad + c_{21}(c_{12}\det\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_3 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix} + c_{22}\det\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix}) \\
&= c_{11}c_{12}\det\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_3 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix} + c_{11}c_{22}\det\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix} \\
&\quad + c_{21}c_{12}\det\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_3 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix} + c_{21}c_{22}\det\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

さらに行列式の交代性により

$$\det\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_3 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix}$$

であることに注意して整理すれば，問題に示された式が得られる．