演習問題

1. 教科書の問題 2.3 の 1（連立一次方程式を解く）.
2. 教科書の問題 2.3 の 2（連立一次方程式が解を持つための条件）.
3. 教科書の問題 1.4 の 3（ベクトルを一次結合として表す）.
4. 教科書の問題 1.4 の 4（ベクトルが一次結合として表されるための条件）.

解答例

一部のみ説明します.

2.

(1) 与えられた連立一次方程式の拡大係数行列は

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 & b \end{array}\right)$$

となっている．この拡大係数行列に基本変形を何度か施して，係数行列部分が簡約な行列になるようにすると，たとえば

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 2 & a+b \\ 0 & 1 & -1 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 1-a-2b \end{array}\right)$$

となる[*]．したがって与えられた連立一次方程式は

$$\begin{cases} x_1 \phantom{{}+x_2} + 2x_3 = a+b \\ \phantom{x_1+{}} x_2 - x_3 = -a \\ 0 = 1-a-2b \end{cases}$$

という連立一次方程式と同値であり，この連立一次方程式が解を持つための必要十分条件は第 3 式の右辺 $1-a-2b$ が 0 に等しいこと，すなわち $a+2b=1$ であること．

(2) 与えられた連立一次方程式の拡大係数行列は

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & -2 & a & 5 \end{array}\right)$$

となっている．この拡大係数行列に基本変形を何度か施す．今回は係数行列部分に文字が含まれているので（これが (1) とは異なる点），無理に「係数行列部分が簡約な行

[*] この形は一意的ではない．たとえば，第 3 行に 0 でない数を掛けても「係数行列部分が簡約な行列である」という状態は崩れない（第 3 行に 0 を掛けるのは基本変形ではないから許されない）．第 3 行の何倍かを他の行に加えることもできてしまう．

列である」状態まで持ち込まず，それに近い簡単な形にまで変形できればよいものと考える．すると，たとえば

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 3/2 & 7/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & a-2 & 1 \end{array}\right) \tag{$*$}$$

と変形できる．

$a \neq 2$ であれば $(*)$ の $(3,3)$ 成分は 0 でないので，第 3 行を $1/(a-2)$ 倍することができ，変形を続行して，係数行列部分が単位行列になるようにすることができる．このときは解が存在する．

$a = 2$ であれば $(*)$ の $(3,3)$ 成分は 0 であって，$(*)$ はすでに「係数行列部分が簡約な行列である」状態になっている．しかし第 3 行の一番右の成分は 0 でないから，この連立一次方程式は解を持たない．

以上より，解が存在するための必要十分条件は $a \neq 2$.

4.

(1) 問題を言い換えると，これは，$\boldsymbol{a} = x_1\boldsymbol{b}_1 + x_2\boldsymbol{b}_2$ となるような $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ が存在するための条件を求めよということである．$\boldsymbol{a} = x_1\boldsymbol{b}_1 + x_2\boldsymbol{b}_2$ は

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

すなわち

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = a \\ 2x_1 + 3x_2 = 2 \\ x_1 + x_2 = 3 \end{cases}$$

という連立一次方程式と同値で，この連立一次方程式が解を持つための条件を求めればよい．拡大係数行列

$$\left(\begin{array}{cc:c} 1 & 2 & a \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

に基本変形を何度か施し，係数行列部分が簡約な行列になるようにすると，たとえば

$$\left(\begin{array}{cc:c} 1 & 0 & -3a+4 \\ 0 & 1 & 2a-2 \\ 0 & 0 & a+1 \end{array}\right)$$

となる．これに対応する連立一次方程式が解を持つための必要十分条件は $a + 1 = 0$, すなわち $a = -1$.