期末試験の結果について

配点は，第 1 問から第 5 問まで 12 点ずつです．満点は 60 点，最高点 60 点（1 名）でした．得点分布は以下のとおりです．

得点	0–19	20–24	25–29	30–34	35–39	40–44	45–49	50–54	55–59	60
人数	8	4	6	11	13	12	4	8	1	1

解説・採点基準

1. 変形の仕方の一例を挙げると次のようになります（各ステップで行っている基本変形は，そのステップ直前における行列の第 1, 2, 3, 4 行を①, ②, ③, ④と表した上で説明してあります）．

$$
A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 & -1 & 5 \\ -3 & -2 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & -2 & -1 & 5 \\ -3 & -2 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} ② \\ ① \\ \\ \\ \end{array}
$$

$$
\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & -4 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ ② + ① \times (-2) \\ ③ + ① \times (-2) \\ ④ + ① \times 3 \end{array}
$$

$$
\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & -4 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ ② \times (-1) \\ \\ \\ \end{array}
$$

$$
\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} ① + ② \times (-1) \\ \\ ③ + ② \times 2 \\ ④ + ② \times (-1) \end{array}
$$

$$
\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ ③ \times (1/5) \\ \\ \end{array}
$$

$$
\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} ① + ③ \times 3 \\ ② + ③ \times (-4) \\ \\ ④ + ③ \times (-2) \end{array}
$$

他にも方法は無数にありますが，最終的な結果（「A の簡約化」）はどのような経路をたどっても一致するのでした．また上の結果から，A の階数は 3 であることがわかります．

(1) には 8 点を配点しました．深刻な誤りとして

- 最後の結果が簡約な行列になっていない
- 基本変形で実現できないような変形が行われている

というのがありました．これらは 0 点です．後者について少し説明を加えましょう．「基

本変形で実現できないような変形」と言っているのは，非常に単純な例を挙げると

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} ①+② \\ ②+① \end{matrix}$$

といったものです．これを何回かの基本変形の組み合わせとして実現する方法は，冷静に考えると見つからないことに気づくはずです．

より軽微な誤りがある解答は 4 点としました．たとえば

- 単純な計算ミス
- そもそも最初の行列を写し間違えている

といったものです．この種の誤りは，100% 無くすことはできないのは確かです．ですが，この問題に関して言えば計算方法は一通りではないのだから，複数の方法を試すことで計算ミスはかなり避けられるはずです．また転記の間違いというのは，常にそれが起こる可能性を意識して確認すべき事柄です．これは単なる試験ですから困るのは自分だけですが，間違ってはいけない場面というのもあります．間違いを起こさないためにどんな方法が採れるかといったことも，将来的にはよく考えるようにしてください．（コンピュータに任せればいい？ コンピュータへの作業の引き渡し，読み取り，そういったところで決定的な勘違いをしていないか，確認すべき人はあなたです．それにプログラムにバグがあるかもしれないし．）

記号の使い方について二点指摘しておきます．まず，行列を基本変形する際に，それらを $=$ でつなぐのはおかしい．$=$ というのは両辺が等しいことを表す記号であって，「左辺に何らかの許可された操作を施すと右辺になる」ということを表す記号ではありません．また，行列の括弧は誤解の余地のないように描くこと．丸括弧はきちんと丸く描かないと，行列式の記号と区別がつかなくなります．こういったことは減点対象とはしませんでしたが，なんというかそれ以前の問題であって，読み手の信頼を獲得できるかどうかに関わることです．

(2) は 4 点．(1) が正しく簡約化されていればもちろん問題ないのですが，(1) の変形が簡約な行列にまで達していなくても，階段行列（この講義では扱っていない概念です）になっていれば，それから $\mathrm{rank}(A) = 3$ を結論してよいことにしました．その他の場合でも，適切な説明を付記してあればもちろん可です．さらに，(1) の変形に誤りがあった場合も，それに基づいて「階数の読み取り」が正しく行われているのであれば，4 点のうち 2 点を加点しました．

2. (1), (2) で与えられた連立一次方程式の拡大係数行列はそれぞれ

$$\left(\begin{array}{cccc:c} 3 & 1 & 3 & 1 & -7 \\ 2 & -1 & 7 & -6 & -8 \\ -2 & 2 & -10 & 10 & 10 \end{array}\right), \qquad \left(\begin{array}{cccc:c} 3 & 1 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 7 & -6 & 1 \\ -2 & 2 & -10 & 10 & -2 \end{array}\right)$$

です．連立一次方程式を解くには，これらに基本変形を何度か施して係数行列部分が簡約な行列になるようにすればよいのでした．(1) の拡大係数行列を変形した結果は

$$\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \tag{2.1}$$

です．(2) のほうは変形結果は一通りには定まりませんが，係数行列部分は (2.1) と同じで，第 3 行の点線右側の成分が 0 でない数になります．なお，(1), (2) で与えられた連立

一次方程式の係数行列は完全に一致しているので，拡大係数行列に施す変形も完全に同じでかまいません．そこで，拡大係数行列をひとまとめにして

$$\left(\begin{array}{cccc:cc} 3 & 1 & 3 & 1 & -7 & 5 \\ 2 & -1 & 7 & -6 & -8 & 1 \\ -2 & 2 & -10 & 10 & 10 & -2 \end{array}\right)$$

とし，これに基本変形を施していって

$$\left(\begin{array}{cccc:cc} 1 & 0 & 2 & -1 & -3 & * \\ 0 & 1 & -3 & 4 & 2 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (0\text{ でない数}) \end{array}\right)$$

を得てもよいのでした．

以上の変形の結果から，(1) の解は

$$\begin{cases} x_1 = -3 - 2c_1 + c_2 \\ x_2 = 2 + 3c_1 - 4c_2 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases} \qquad (c_1,\ c_2\text{ は任意定数})$$

となります．(2) には解は存在しません．

配点は以下のとおり．まず拡大係数行列の変形に関して，

- (1), (2) いずれか一方の変形が，連立一次方程式の解をすぐに読み取れる段階まで完了している（係数行列が必ずしも簡約な行列になっていなくてもよい）
- いずれの変形にも誤りがあるが，両者とも係数行列部分の基本変形は正しく行われており，簡約な行列に達している

のどちらかが満たされていれば 4 点を加点しました（ごく軽微な誤りのせいでその基準に届かない場合，4 点のうち 2 点を加点したケースがあります）．さらに，(1) の結論に 4 点，(2) の結論に 4 点です．なお (1) については，c_1, c_2 の任意性が指摘されていることを要求し（「$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$」のような記述も可としました），それが欠けていれば 4 点のうち 2 点のみ加点しました．解が無限に多くあることを明確に認識してほしいと思います．

3. 正方行列 A が逆行列を持つ（そのことを「A が正則である」とも言いました）ための必要十分条件の一つに，「A の行列式 $\det A$ が 0 と等しくない」というものがありました．ここではそれを使うのが便利です．$\det A = 2a$ なので，A が正則であるための必要十分条件は $2a \neq 0$ すなわち $a \neq 0$.

逆行列を求める方法は 2 通り考えられます．(3 次行列なので) 3 個の連立一次方程式を一斉に解くと考えて基本変形を用いる方法と，余因子行列を用いて求める方法．前者を採用するのであれば，「$a \neq 0$」という条件によって確かに計算が問題なく進むことを観察しながら進めてください．結論は

$$A^{-1} = \frac{1}{2a}\begin{pmatrix} 1 & -a & 1 \\ a & -a^2 & -a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$$

となります．余因子行列を用いる場合は，成分の配置を間違えないように注意．

上記とは別のアプローチとして，行列式 $\det A$ の計算はせずに，基本変形を用いた逆行列の計算をいきなり始めてしまうことも考えられます．その場合は途中で，$a \neq 0$ と仮定

しないと先に進めない状況が出現します．場合分けをして，$a \neq 0$ ならば逆行列が得られること，$a = 0$ ならば（A の簡約化が単位行列にならないので）逆行列が存在しないことをそれぞれ確かめてください．

ところで，いま述べたような「基本変形を用いた逆行列の計算をいきなり始めてしまう」方法に関して，次のような問題のある議論の仕方もしばしば見られました．$a = 0$ か否かには特に注意を払うことなく最後まで計算を進め，「最終的に得られた表式が意味を持つためには $a \neq 0$ でなければならないから」逆行列を持つための必要十分条件は $a \neq 0$ であると結論するものです．これは誤りです．「$a \neq 0$ のとき，最終的に得られた表式が意味を持つ」ことは，「$a \neq 0$ のとき，それを導く議論が正当である」ことを意味しない．次のような例はそれを納得する助けになるでしょうか．「関数 $f(x) = 1/x$ の原始関数として $F(x) = \log|x|$ がある．したがって

$$\int_a^b \frac{1}{x}\,dx = F(b) - F(a) = \log|b| - \log|a|.$$

最後の $\log|b| - \log|a|$ は $a = 0$ や $b = 0$ の場合には意味を持たない式なので，その場合は除外することになるけれども，$a \neq 0$ かつ $b \neq 0$ であれば

$$\int_a^b \frac{1}{x}\,dx = \log|b| - \log|a|$$

が成立する．」――というのは正しいか？ これは誤りで，a と b の符号が異なっていれば，左辺の定積分がそもそも意味を持ちません．

さらにもう一つよく見られた誤りを指摘します．行列 A の基本変形を進めていって，たとえば

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

という行列に到達します（その過程にも問題があるのですが，ここではそれは置いておく）．これと「A が逆行列を持つための必要十分条件は A の簡約化が単位行列となること」という事実から，「A が逆行列を持つための必要十分条件は $a = 1$」とするものです．「$a = 1$ ならば A は逆行列を持つ」というのは間違いではない．でも，「$a \neq 1$ ならば持たない」ということは (3.1) からはわからない．a が 1 でない（そして 0 でもない）場合には，(3.1) ではまだ簡約化の手続きは完了していないというだけの話です．

配点は (1) 4 点，(2) 8 点．(2) は計算方法を理解していれば結果が誤っていても 4 点を加点．(1) において，「$\det A \neq 0$ ならば逆行列が存在する」と書かれているなど，条件の必要十分性に対する認識が危うい答案は 2 点減点としました．また，上述のような「最終的に得られた表式が意味を持つのは $a \neq 0$ のとき」という議論が行われている場合は，(1) は 0 点とし，(2) は計算が正しければ特に減点せず 8 点を加点しました．(1) で逆行列が存在するケースに $a = 0$ のときを含めてしまっている場合は，(2) の結果と矛盾を来すことになるので，(1) を 0 点とし，(2) も計算方法の理解に対する 4 点のみを加点しました．

4. 与えられた等式の左辺，中辺はそれぞれ

$$\begin{pmatrix} AX & AY + BZ \\ O & CZ \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} XA & XB + YC \\ O & ZC \end{pmatrix}$$

となるので，

$$AX = XA = E, \quad CZ = ZC = E, \quad AY + BZ = O, \quad XB + YC = O \tag{4.1}$$

が成り立っていることがわかります．(4.1) の第 1, 2 式は X, Z が各々 A, C の逆行列であることを示しています．さらに第 3 式に $Z = C^{-1}$ を代入して $AY + BC^{-1} = O$，よって $AY = -BC^{-1}$ だから，両辺に左から A の逆行列 A^{-1} を掛けて $Y = -A^{-1}BC^{-1}$ を得ます．

(4.1) の第 4 式 $XB + YC = O$ は用いずに済んでしまうのですね（こちらを使っても $Y = -A^{-1}BC^{-1}$ は得られる．その場合，第 3 式を使わずに済むということになる）．根本的な事情は次のとおりです．$\tilde{A}$, $\tilde{X}$ が正方行列のとき，$\tilde{A}\tilde{X}$ が単位行列であれば，$\tilde{X}\tilde{A}$ も単位行列になる（したがって $\tilde{A}$ と $\tilde{X}$ は互いの逆行列になる）という事実がありました．よって，問題の初めに与えた仮定を

$$\begin{pmatrix} A & B \\ O & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X & Y \\ O & Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & O \\ O & E \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} X & Y \\ O & Z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ O & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & O \\ O & E \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

と分割すれば，一方から他方が導かれることになり，わざわざ両方を書くのは（一種のわかりやすさはあるけれども，論理的には）無駄だということがわかります．本当は，(4.2) の第 1 式から導かれる

$$AX = E, \quad CZ = E, \quad AY + BZ = O$$

だけから X, Y, Z は決定されてしまうということ．

Y を求める際，行列の積の順番に注意を払うのは大切です．せっかく「$AY = -BC^{-1}$」まで正しくやっているのに，「$Y = -BC^{-1}A^{-1}$」などとしてしまっている解答がありました．また，

$$Y = -\frac{BC^{-1}}{A} \tag{4.3}$$

という解答もずいぶんあって驚いた．「行列の分数」なるものをわれわれは定義していないし，そのような概念を導入することは一般的にありません．一つの理由はやはり順序の問題であって，(4.3) のように書かれても，$Y = -A^{-1}BC^{-1}$ なのか $Y = -BC^{-1}A^{-1}$ なのか，はたまた $Y = -BA^{-1}C^{-1}$ なのかわからないからでしょう．

配点は (1) 4 点，(2) 8 点．(1) は理由の説明におかしなところがあれば 0 点です．(2) の内訳は，$X = A^{-1}$ および $Z = C^{-1}$ に各 1 点，$Y = -A^{-1}BC^{-1}$ に 6 点．誤答には特に救済措置はありません．

5. この問題は他をすべて終えた人向けの挑戦問題のつもりだったのですが，案外正答者が多かったです．後から考えてみれば，結論を問題文中に与えたからなんでしょうね．

一つの方法は，行列式の余因子展開を用いて $\det A_n$ と $\det A_{n-1}$ の関係式を導き，数学的帰納法を使うことです．具体的にはいくつか手段が考えられます．たとえば，与えられ

た行列の第 $n+1$ 行から第 n 行を引くことにより

$$\det A_n = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ x & x & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 & 2 \\ x & x & x & 3 & \cdots & 3 & 3 & 3 \\ x & x & x & x & \cdots & 4 & 4 & 4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x & x & x & x & \cdots & x & n-1 & n-1 \\ x & x & x & x & \cdots & x & x & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & x-n \end{vmatrix}$$

となり，第 $n+1$ 行に関する余因子展開を考えると

$$\det A_n = (x-n)\det A_{n-1}$$

が得られます．$A_1 = (x)$ に対しては $\det A_1 = x$ ですから，数学的帰納法により問題の主張が得られます．

次のような別証明も考えられます．まず，$\det A_n$ は x に関する $n+1$ 次の多項式であって，x^{n+1} の係数は 1 です．なぜか？ $A_n = (a_{ij})$ と書くことにすれば，定義により

$$\det A_n = \sum_{\sigma \in S_{n+1}} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n+1,\sigma(n+1)}$$

ですが，各 a_{ij} は x または実数なので，$a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n+1,\sigma(n+1)}$ は $n+1$ 次以下の単項式になっています．さらに $a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n+1,\sigma(n+1)}$ が実際に $n+1$ 次となるのは σ が単位置換の場合だけなので，

$$\begin{aligned} \det A_n &= a_{11} a_{22} \cdots a_{n+1,n+1} + (x \text{ の } n \text{ 次以下の多項式}) \\ &= x^{n+1} + (x \text{ の } n \text{ 次以下の多項式}) \end{aligned}$$

となるわけです．ここで $f(x) = \det A_n$ とおきましょう．$x = 0, 1, 2, \ldots, n$ を代入したときに $f(x)$ が 0 になることを示せば，因数定理により結論が得られます．ところが $x = 0$ とすると第 1 列が零ベクトルとなるので $f(0) = 0$ だし，また x に $1, 2, \ldots, n$ のいずれか（j とします）を代入すると第 j 列と第 $j+1$ 列が完全に一致するのでやはり $f(j) = 0$ が従う．これで証明が完成しました．

完答で 12 点．正確には数学的帰納法を用いる解答であっても，「以上のような変形を繰り返して」のような説明でも可としました．やや説明が（数学的に見て）不足している場合は 8 点とし，目標に達していなくても，重要なアイディアを示すことができていれば 4 点を与えました．

成績について

学期初めに説明したように，中間試験と期末試験の得点をそれぞれ $S_{\text{中間}}, S_{\text{期末}}$ とし，

$$S = \begin{cases} 2S_{\text{期末}} & (S_{\text{期末}} \geqq S_{\text{中間}} \text{ の場合}) \\ S_{\text{中間}} + S_{\text{期末}} & (S_{\text{期末}} < S_{\text{中間}} \text{ の場合}) \end{cases}$$

により求めた S に基づき成績を決定します．この S の分布は以下のとおりでした．

S	0–49	50–59	60–69	70–79	80–89	90–99	100–109	110–119	120
人数	8	6	7	16	18	4	8	1	1

成績をつける際には, 上記の S をもとに, 次のように補正した得点 $\tilde{S}$ を用います．まず $S < 60$ のときは $\tilde{S} = S$ です．$S \geq 60$ のとき，$S = 60 + t$ とおいて

$$\tilde{S} = 60 + 40 \times \left(\frac{t}{60}\right)^{0.9} \quad \text{（小数点以下切り捨て，100 点を超えた分も切り捨て）}$$

とします．この補正後の得点 $\tilde{S}$ が 60 未満で F, 60 以上で C，70 以上で B，80 以上で A，90 以上で S です．それぞれに該当する人数は順に，13 人，8 人，26 人，13 人，8 人です（期末試験の欠席者を除く）.