2017 年度 線形代数学 A（担当：松本佳彦）期末試験

2017 年 8 月 3 日（木）3 限　試験時間 70 分

配布物：問題，解答用紙 1 枚（追加可），計算用紙 1 枚

以下の問題に答えよ．解答の順番は問わない．いずれの問題についても，特に断り書きのない限り，解答の根拠となる説明や計算を与えること．

1. 次の 4×5 行列 A について考える：

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 & -1 & 5 \\ -3 & -2 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

(1) 行列 A を，基本変形（行基本変形のこと）を何回か施すことによって簡約化せよ．途中経過も示し（基本変形 1 回ごとに分けて書く必要はなく，適宜まとめてよい），各段階でどのような基本変形を施したかということの説明も添えること（教科書にある略記法を用いてもよい）．

(2) A の階数 $\mathrm{rank}(A)$ を答えよ．

2. 次の連立一次方程式を，拡大係数行列の基本変形を用いて解け．

(1) $$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = -7 \\ 2x_1 - x_2 + 7x_3 - 6x_4 = -8 \\ -2x_1 + 2x_2 - 10x_3 + 10x_4 = 10 \end{cases}$$

(2) $$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 5 \\ 2x_1 - x_2 + 7x_3 - 6x_4 = 1 \\ -2x_1 + 2x_2 - 10x_3 + 10x_4 = -2 \end{cases}$$

3. 実数 a に対し，次の行列 A を考える：

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & a \\ -1 & 0 & 1 \\ a & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) A の逆行列 A^{-1} が存在するための，a の値に関する必要十分条件を求めよ．

(2) (1) で求めた条件が満たされている場合に，A^{-1} を求めよ．

4. A, B, C, X, Y, Z を 6 個の $n \times n$ 行列とし，これらについて

$$\begin{pmatrix} A & B \\ O & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & Y \\ O & Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X & Y \\ O & Z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ O & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & O \\ O & E \end{pmatrix}$$

が成り立っていると仮定する．ただし，この式の中に現れる E, O は，それぞれ $n \times n$ 型の単位行列，零行列を表す．

(1) A, C はいずれも逆行列を持つ．そのことを証明せよ．

(2) X, Y, Z の各々を，A, B, C を用いて表せ（A^{-1}, C^{-1} も用いてよい）．

5. 正整数 n に対し，成分に文字 x を含む $n+1$ 次正方行列

$$A_n = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ x & x & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 & 2 \\ x & x & x & 3 & \cdots & 3 & 3 & 3 \\ x & x & x & x & \cdots & 4 & 4 & 4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x & x & x & x & \cdots & x & n-1 & n-1 \\ x & x & x & x & \cdots & x & x & n \\ x & x & x & x & \cdots & x & x & x \end{pmatrix}$$

を考える．$\det A_n = x(x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-n+1)(x-n)$ であることを証明せよ．