中間試験の結果について

配点は，第 1 問から第 4 問まで 15 点ずつです．満点は 60 点，最高点は 51 点（3 名）でした．得点分布は以下のとおりです．

得点	0–19	20–24	25–29	30–34	35–39	40–44	45–49	50–54	55–60
人数	0	2	7	15	12	13	12	5	0

採点基準・講評

1. (1), (4) はいずれも定義されない（両方できて 5 点）．(2), (3) は各 5 点．正答は以下のとおりです：

$$(2)\quad AC = \begin{pmatrix} 21 & 12 & 35 \\ 18 & -6 & -14 \end{pmatrix}, \qquad (3)\quad BA = \begin{pmatrix} -9 & -6 & 3 & -6 \\ -3 & -14 & 25 & 4 \\ 21 & 10 & 1 & 16 \end{pmatrix}.$$

(2), (3) については，間違っていた場合でも，成分に 1 個誤りがあるだけだったら特別に 3 点を与えました．

ほとんどの人が正しい解答を与えていました．よかったです．

2. (1), (2), (3) 各 5 点．正答は (1) $|A| = 7$，(2) $|B| = -5$，(3) $|C| = ab - 8$ です．説明不足のもの（計算の過程が示されていないものも含む）は 3 点とし，また (3) については，間違っていた場合でも，誤りが軽微なものであれば 2 点を与えました．

(1), (2) はほとんどの人ができていました．(3) は勝手な誤った計算法を適用している人が一定数見られました——事前に演習問題を解いて答え合わせをした経験があれば，そんなことは起こらないはずだよ！

3. (1), (2), (3) 各 5 点．いずれも誤った主張です．反例を適切に提示していれば 5 点ですが，提示の際に必要な計算にミスがあった場合，瑣末なものであれば 4 点，重大なものであれば 2 点としています．なお，文字を使って計算を進めており，最終的に「具体的」な反例の提示が行われなかった場合も 2 点．正答例は以下のとおり．

(1)　誤り．たとえば $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とすれば

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

であり，$AB \neq BA$ となっている．

(2)　誤り．たとえば $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とすれば $AB = O$ となるが（$O_{2,2}$ のことを単に O と書いた），このとき $A = O$ でも $B = O$ でもない．

(3)　誤り．たとえば

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とすれば，$AB = E_2$ であるが

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq E_3.$$

(1) はほとんどの人ができていました．(2), (3) は，そもそも正誤を間違えている人がけっこういた．講義では述べていなかったから，試験中に試行錯誤しなければならないわけで，当然と言えば当然ですね（特に (3) は $m = n$ のときは正しく，そのことを述べたので，紛らわしかったでしょう）．でも，「正しいことを“証明”できてしまっている」人は，何か無理なことをその“証明”中でやっているはずです．よく確認しておいてください．

4. (1) 9 点，(2) 6 点．

(1) 12 個の偶置換を列挙して 6 点．より詳しくは，12 個の偶置換を以下の 3 つのグループに分け，各々について，すべての置換を挙げることができて 2 点としました．

- 単位置換 ε.
- 3 文字の巡回置換：$(2\ 3\ 4), (2\ 4\ 3), (1\ 3\ 4), (1\ 4\ 3), (1\ 2\ 4), (1\ 4\ 2), (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)$.
- 互いに交わりを持たない 2 つの互換の積：$(1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)$.

もちろん，一般の置換の記法を用いて表現してもかまいません．たとえば $(2\ 3\ 4)$ は

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

となります．

これらが偶置換である理由を説明できてさらに 3 点です．偶置換とは「偶数個の互換の積として表されるような置換のこと」でした．説明には，**互換**の個数に着目していることが，誤解のしようもなく明瞭であることを要求しました（たとえば「互換」であるべき言葉が誤っていてはいけない．また $\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^2 = 1$ などと書いてあるだけの解答も，何の個数を数えているのかわからないのでだめ）．また，一般的な判定基準（というより定義）を述べただけでは不十分で，実際に各々の置換が偶数個の互換の積として表されることを確かめることが必要です．

(2) 完成度により 2 点または 4 点をつけました（6 点がついた人はいなかった）．以下に証明の例を述べます．

$n \geqq 2$ とし，n 文字の置換のうちの偶置換全体の集合を E_n，奇置換全体の集合を O_n とする（偶 even，奇 odd の頭文字．単位行列や零行列と紛らわしいですが，行列は出てこないからよいことにしましょう）．E_n と O_n の元（げん）（要素）の間に一対一対応を構成できれば，問題文にある主張が示されたことになる．一般に σ が偶置換のとき $(1\ 2)\sigma$ は奇置換だから，次のような E_n から O_n への写像 F を考えることができる：

$$F\colon E_n \to O_n, \qquad F(\sigma) = (1\ 2)\sigma.$$

これが一対一対応（漏れも重複もない写像．「全単射」とも言う）であることを確かめる．

漏れがないこと（全射性）　どんな $\tau \in O_n$ に対しても，$\sigma \in E_n$ を $\sigma = (1\ 2)\tau$ によって定めると，$F(\sigma) = (1\ 2)(1\ 2)\tau = \tau$ となる．

重複がないこと（単射性）　相異なる $\sigma_1, \sigma_2 \in E_n$ に対し，必ず $F(\sigma_1) \neq F(\sigma_2)$ であればよい．もし $F(\sigma_1) = F(\sigma_2)$ すなわち $(1\ 2)\sigma_1 = (1\ 2)\sigma_2$ であれば，両辺に左から $(1\ 2)$ を掛けて $\sigma_1 = \sigma_2$ となってしまい矛盾．