2017年度 線形代数学A（担当：松本佳彦）中間試験

2017年6月15日（木）3限　試験時間70分

配布物：問題，解答用紙1枚（追加可），計算用紙1枚

以下の問題に答えよ．解答の順番は問わない．いずれの問題についても，特に断り書きのない限り，解答の根拠となる説明や計算を与えること．

なお，この試験では，「行列」とは実数を成分とする行列のことを意味するものと約束する．

1.　次の行列 A, B, C を考える：

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -1 & 6 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 8 \\ 0 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & -1 \\ 6 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

以下の (1), (2), (3), (4) の各々について，そこに示された行列の積が定義される場合はその積を求め，定義されない場合は「定義されない」と答えよ．

(1)　AB　　(2)　AC　　(3)　BA　　(4)　CA

なお前者の場合，計算結果だけを書けばよい（計算の過程を説明してもよいが，採点には影響しない）．後者の場合にも，理由は不要である．

2.　次の行列の行列式を求めよ．

(1)　$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$　　(2)　$B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

(3)　$C = \begin{pmatrix} 0 & a & -3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -5 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -4 & b & 0 \end{pmatrix}$　　（a, b を用いた式で表す）

3.　次の一般的主張は正しいか．正しければ証明し，誤っていれば反例（その一般的主張が誤っていることを示す具体的な例）を挙げよ．

(1)　「n 次正方行列 A, B に対し，$AB = BA$ が成り立つ.」

(2)　「$m \times n$ 行列 A と $n \times r$ 行列 B に対し，もし $AB = O_{m,r}$ ならば，$A = O_{m,n}$ または $B = O_{n,r}$ が成り立つ.」（ただし $O_{m,r}$ は $m \times r$ 型の零行列を表す．$O_{m,n}, O_{n,r}$ についても同様.）

(3)　「$m \times n$ 行列 A と $n \times m$ 行列 B に対し，もし $AB = E_m$ ならば $BA = E_n$ が成り立つ.」（ただし E_m は m 次単位行列, E_n は n 次単位行列を表す.）

4.　置換に関する次の問いに答えよ．

(1)　4文字の置換（文字1, 2, 3, 4の置換）は全部で24個あり，それらのうち12個が偶置換である．12個の偶置換をすべて列挙せよ．それらが偶置換である理由も説明すること．（なお，すべてを挙げられなくても加点の対象になり得る．わかるかぎり書くこと.）

(2)　一般に，n を2以上の自然数とするとき，n 文字の置換のうちの偶置換の総数と奇置換の総数は等しい．そのことを証明せよ．

答案の返却について　採点が終わりしだい，答案を数学資料室（全学教育推進機構実験棟II 364号室）にて返却します．詳細については，後日，授業のWebページ (`http://www.math.sci.osaka-u.ac.jp/~matsumoto/courses/2017-laA/`) およびKOANで通知します．