Poincaré-Einstein 計量について

松本佳彦

東京大学大学院数理科学研究科

関東若手幾何セミナー (2014/1/25)

専門分野：多変数関数論・複素幾何学，CR 幾何学（Cauchy–Riemann 幾何学）

2013 年 3 月に博士課程修了
論文——*Asymptotically complex hyperbolic Einstein metrics and CR geometry*

現在：東大・数物フロンティアリーディング大学院 (FMSP) 教育支援員

Einstein 計量とは

定義

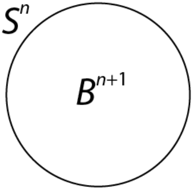
Riemann 計量 g が **Einstein 計量**であるとは，次が成り立つこと：

$$\exists\lambda \in \mathbb{R} \qquad \text{s.t.} \qquad \mathrm{Ric} = \lambda g.$$

ただし，Ric（Ricci テンソル）は Riemann 曲率 R を用いて次で定義される：

$$\mathrm{Ric}(X, Y) := \mathrm{tr}_g[Z \longmapsto R(Z, X)Y] \qquad \text{または} \qquad \mathrm{Ric}_{ij} := \sum_{k=1}^{N} R_{ki}{}^{k}{}_{j}\,.$$

Poincaré-Einstein 計量のモデル：単位開球上の双曲計量



$$g_{\mathrm{hyp}} = 4\frac{(dx^1)^2 + \cdots + (dx^{n+1})^2}{(1-|x|^2)^2}$$

この場合，S^n の標準的な計量を h_{std} とすると，

$$\{\,(B^{n+1}, g_{\mathrm{hyp}})\text{ の等長変換}\,\} \cong \{\,(S^n, h_{\mathrm{std}})\text{ の共形変換}\,\} \quad (\cong \mathrm{O}(n+1,1)/\{\,\pm\,\mathrm{id}\,\}).$$

注

$\varphi \in \mathrm{Diff}(S^n)$ が (S^n, h_{std}) の共形変換 $\overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\varphi^* h_{\mathrm{std}}$ は h_{std} の正値関数倍

Poincaré 計量の定義

X を境界付き多様体とする．境界定義関数 $\rho \in C^\infty(X)$ を任意にとる
$(\rho > 0$ in $\mathring{X}$， $\rho = 0$ & $d\rho \neq 0$ along $\partial X)$．

定義

Poincaré 計量とは，$\mathring{X}$ 上の Riemann 計量 g で次の条件を満たすもの．

1. 共形コンパクト性：$\rho^2 g$ が境界まで計量として延長する．
2. 漸近的双曲性：境界において断面曲率 $K \longrightarrow -1$．

共形コンパクト性により，$h = (\rho^2 g)|_{T\partial X}$ は ∂X 上の Riemann 計量．
その共形類 γ は ρ に依存しない．**共形無限遠 (conformal infinity)** と呼ぶ．

例

$X = \overline{B}^{n+1}$ のとき，g_{hyp} の共形無限遠は $\gamma_{\mathrm{std}} = [h_{\mathrm{std}}]$．

以降，$n \geq 3$ を仮定する．

複素幾何的な背景

Poincaré-Einstein 計量の考察を始めたのは Fefferman–Graham (1985).
背景：Fefferman (1976) による複素 Monge–Ampère 方程式の研究.

Fefferman 1976

$\Omega \subset \mathbb{C}^{n+1}$ を有界強擬凸領域とする（単位開球が標準的な例）.
そのとき，$\overline{\Omega}$ 上の複素 Monge–Ampère 方程式の境界値問題

$$\det\left(\frac{\partial^2 \log(1/u)}{\partial z^j \partial \overline{z}^k}\right) = u^{-n-2} \quad \text{in } \Omega, \qquad u = 0 \quad \text{on } \partial\Omega$$

は，$\tilde{\mathcal{G}} = \mathcal{K}^\times(\overline{\Omega})^{-1/(n+2)} \cong \mathbb{C}^* \times \overline{\Omega}$ 上の関数 $\tilde{u} = |z^0|^2 u$ についての境界値問題とみなせば，双正則不変.

解 $\tilde{u} = |z^0|^2 u \rightsquigarrow \tilde{\mathcal{G}}$ 上の Ricci-flat Lorentz-Kähler 計量 $\tilde{g}$ （アンビエント計量）.
これを実超曲面 $\{\, \tilde{u} = 1 \,\}$ に引き戻すと，Lorentz-PE 計量が得られる.

今日話したいこと

1. Poincaré-Einstein 計量の大域解析
   - 特に，PE 計量の存在問題に対する，Graham–Lee，Anderson のアプローチ
2. Poincaré-Einstein 計量の漸近展開と境界の幾何
   - Branson の仕事を中心に：共形共変微分作用素の汎関数行列式と Q 曲率
   - 自分の結果にも少し触れたい

Graham–Lee の定理：双曲計量の微小変形による PE 計量の構成

定理 (Graham–Lee 1991, Biquard 2000)

$h \in \mathrm{Met}^{2,\alpha}(S^n)$ を，標準的な計量 h_{std} に十分近い Riemann 計量とする．
そのとき，$\gamma = [h]$ を共形無限遠とするような $g \in \mathrm{PE}^{2,\alpha}(B^{n+1})$ が存在する．

閉多様体では，負の断面曲率を持つ Einstein 計量は変形を許さない．
何が違うのか？

Graham–Lee の定理の証明 (1) Einstein 計量の無限小変形の方程式

Einstein 方程式を，g_{hyp} に関する Bianchi ゲージ条件の下で考える：

$$\mathrm{Ric} = \lambda g, \qquad \delta g + \frac{1}{2} d\,\mathrm{tr}\, g = 0.$$

その線型化は

$$(\Delta_{\mathrm{L}} - 2\lambda)\sigma = 0, \qquad \sigma \text{ は trace-free な対称 2 テンソル.}$$

L^2 で考えるかぎり，$K < 0 \Longrightarrow$ 解は $\sigma = 0$ のみ（$\rightsquigarrow$ 閉多様体のときの結論）.
しかし，PE の場合には，共形無限遠を変えるような変形は L^2 ではない.

Graham–Lee の定理の証明 (2) Laplace 型方程式の非 L^2 解

より簡単な場合：Δ を双曲計量が定める（関数に作用する）ラプラシアンとし，

$$\Delta u = 0, \qquad u|_{S^n} = f, \qquad f \in C^\infty(S^n)$$ を解きたい．

まず u_0 を f の任意の延長とするとき，$\Delta u_0 = O(\rho)$．これは，極座標で

$$\Delta = -\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho} - n\right) + \rho^2\Delta_{h_{\mathrm{std}}} + (\rho \text{ について 4 次以上の項})$$

と表せることによる．そして次を適用して解を得る：

命題 (Graham–Lee 1991)

$0 < \delta < n$ に対して，次の写像は Banach 空間の同型を与える：

$$\Delta\colon C^{2,\alpha}_\delta(B^{n+1}) \longrightarrow C^{0,\alpha}_\delta(B^{n+1}).$$

ただし，C_δ は $O(\rho^\delta)$ のオーダーで減衰する関数の空間を表す．

$\Delta_{\mathrm{L}} - 2\lambda$ に対しても同様の同型定理が成立．あとは Banach 空間の逆関数定理．

Anderson の定理：標準的なものに“近くない”PE 計量の存在

S^3 上の共形構造の空間を $\mathcal{C}(S^3)$，B^4 上の PE 計量の空間を $\mathcal{E}(B^4)$ とする．また

$$\Pi\colon \mathcal{E}(B^4) \longrightarrow \mathcal{C}(S^3), \qquad \Pi(g) := (g \text{ の共形無限遠})$$

とおく．

定理 (Anderson 2008)

次の $\mathcal{C}(S^3)$ の部分空間を考える：スカラー曲率非負，かつ平坦でない計量によって代表されるような共形構造の全体のなす空間．さらにその中で標準的な共形類 $\gamma_{\mathrm{std}} = [h_{\mathrm{std}}]$ の属する連結成分を $\mathcal{C}(S^3)_0$ とし，

$$\mathcal{E}(B^4)_0 := (\Pi^{-1}(\mathcal{C}(S^3)_0) \text{ における } g_{\mathrm{hyp}} \text{ の連結成分})$$

とする．そのとき，次の写像は全射である：

$$\Pi\colon \mathcal{E}(B^4)_0 \longrightarrow \mathcal{C}(S^3)_0.$$

Anderson の定理の証明のスケッチ

1. $\Pi\colon \mathcal{E}(B^4)_0 \longrightarrow \mathcal{C}(S^3)_0$ に対し，$\forall\gamma \in \mathcal{C}(S^3)_0$ について $\Pi^{-1}(\gamma)$ は有限集合．そして，
$$\deg\Pi = \sum_{g\in\Pi^{-1}(\gamma)} (-1)^{\mathrm{ind}\, g}, \qquad \mathrm{ind}\, g := (\Delta_{\mathrm{L}}^{g} + 2n \text{ の } L^2 \text{ 指数})$$
の値は γ に依存しない！
2. 標準的な共形構造 $\gamma_{\mathrm{std}} \in \mathcal{C}(S^3)_0$ に対しては，γ_{std} を共形無限遠とする B^4 上の PE 計量は双曲計量しか存在しない：
$$\Pi^{-1}(\gamma_{\mathrm{std}}) = \{\, g_{\mathrm{hyp}} \,\}.$$
このことから
$$\deg\Pi = 1.$$
特に $\deg\Pi \neq 0$ であり，ここから任意の γ に対して $\Pi^{-1}(\gamma) \neq \emptyset$.

PE 計量の漸近展開，あるいは近似解の存在定理

大域解析的なアプローチとは別に，PE 計量が境界で冪級数展開されると仮定し，その係数を順次決定していくアプローチがある：

$$g = \frac{g_{(0)} + \rho g_{(1)} + \rho^2 g_{(2)} + \cdots}{\rho^2}, \qquad g_{(0)}\big|_{T\partial X} = h.$$

この操作自体は，PE 計量の存在自体を仮定しなくても実行することができる．こうして，一般の共形無限遠に対する「近似解の存在定理」が得られる．

定理 (Fefferman–Graham 1985)

$n+1$ 次元境界付き多様体 X に対し，∂X 上に任意に共形無限遠を指定したとき，

- n が奇数ならば，$\mathrm{Ric} = -ng + O(\rho^\infty)$ を満たす even Poincaré 計量 g がある．
- n が偶数ならば，$\mathrm{Ric} = -ng + O(\rho^n)$，$\mathrm{Scal} = -n(n+1) + O(\rho^{n+1})$ を満たす even Poincaré 計量 g がある．

この計量 g には，微分同相の作用と高いオーダーの誤差を除く一意性がある．

これを用いて，∂X 上の共形不変量を構成することができる．

背景：2 次元の場合 (1) Osgood–Phillips–Sarnak の定理

定理 (Osgood–Phillips–Sarnak 1988)

(M, γ) を 2 次元閉共形多様体（閉 Riemann 面）とする．
共形類 γ に属する面積 1 の Riemann 計量全体を γ_1 とするとき，γ_1 上の汎関数

$$h \longmapsto \det \Delta$$

は，定曲率計量 h において最大値をとる．

ここで $\det \Delta$ は，Δ の固有値を $0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots$ としたときの，「$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \cdots$ のようなもの」である．Δ のスペクトル・ゼータ関数

$$\zeta(s) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^s}$$

を用いて，$\det \Delta := e^{-\zeta'(0)}$ と定義する．

背景：2 次元の場合 (2) Polyakov の公式

Osgood–Phillips–Sarnak の定理を導くために次の公式を用いる.

Polyakov の公式

共形類 γ を代表する計量 h を固定すると，他の計量 $e^{2\varphi}h$ に対し

$$\log\det\Delta_{e^{2\varphi}h} = -\frac{1}{6\pi}\left(\frac{1}{2}\int_M |\nabla\varphi|^2 dA + \int_M K\varphi\, dA\right) + \log\int_M e^{2\varphi} dA + (\mathrm{const}).$$

これは，Δ の共形共変性 (conformal covariance)

$$\Delta_{e^{2\varphi}h} = e^{-2\varphi}\circ\Delta_h$$

から従う.

Graham–Jenne–Mason–Sparling 作用素

n が偶数のときのみを考える.
与えられた ∂X 上の共形類 γ に対し，近似的に Einstein な Poincaré 計量をとる.

定理 (Graham–Jenne–Mason–Sparling 1992, Graham–Zworski 2003)

$1 \leq k \leq n/2$ を整数とする.
任意の $f \in C^\infty(\partial X)$ に対し，次のような形の Δ_g の固有関数が存在する：

$$u = \rho^{n/2-k} F + \rho^{n/2+k} \log\rho \cdot G, \qquad F, G \in C^\infty(X), \qquad F|_{\partial X} = f.$$

さらに，写像 $f \longmapsto G|_{\partial X}$ は $h \in \gamma$ から定まる ∂X 上の微分作用素である.

写像 $f \longmapsto G|_{\partial X}$ を適当に定数倍したものを P_{2k} と書き，**GJMS 作用素**と呼ぶ.
（P_2 は**山辺作用素**，P_4 は **Paneitz 作用素**.）これは次を満たす：

$$(P_{2k})_{e^{2\varphi}h} \circ e^{(-n/2+k)\varphi} = e^{(-n/2-k)\varphi} \circ (P_{2k})_h.$$

Branson–Ørsted の 4 次元版 Polyakov 公式，Q 曲率

4 次元多様体の，計量 h から定まる共形共変的な楕円型微分作用素 A_h を考える．

定理 (Branson–Ørsted 1991)

$\ker A_h = \{$ 定数 $\}$ と仮定する．そのとき，ある定数 γ_1，γ_2，γ_3 が存在して

$$\log \frac{\det A_{e^{2\varphi}h}}{\det A_h} = \gamma_1 \mathrm{I}[\varphi] + \gamma_2 \mathrm{II}[\varphi] + \gamma_3 \mathrm{III}[\varphi].$$

ただし，$\mathrm{I}[\varphi]$，$\mathrm{II}[\varphi]$，$\mathrm{III}[\varphi]$ は次の性質を持つ汎関数である：

$$\begin{aligned} \varphi \text{ が } \mathrm{I}[\varphi] \text{ の臨界点} &\iff |W_{e^{2\varphi}h}| \text{ は定数}, \\ \varphi \text{ が } \mathrm{II}[\varphi] \text{ の臨界点} &\iff Q_{e^{2\varphi}h} \text{ は定数}, \\ \varphi \text{ が } \mathrm{III}[\varphi] \text{ の臨界点} &\iff \Delta_{e^{2\varphi}h} \mathrm{Scal}_{e^{2\varphi}h} \text{ は定数}. \end{aligned}$$

ただしここで，$Q := -\frac{1}{6}(\Delta \mathrm{Scal} - \mathrm{Scal}^2 + 3|\mathrm{Ric}|^2)$．これは

$$P_4\varphi + Q_h = e^{4\varphi} Q_{e^{2\varphi}h}$$

を満たす．

高次元における Q 曲率

一般の偶数 n に対しても，n 次元多様体上で，一定の手続きで

$$P_n\varphi + Q_h = e^{n\varphi} Q_{e^{2\varphi}h}$$

を満たす Q_h を構成することができる．これを **Branson の Q 曲率**という．

- 高次元の Polyakov 公式にも，$Q_h =$ (定数) を特徴付ける汎関数が現れる．
- $P_n 1 = 0$ であり，また P_n は自己双対．$\rightsquigarrow \displaystyle\int_M Q_h dV_h$ は共形不変量．

Einstein 多様体に対する全 Q 曲率の第二変分公式

$\int_M Q_h dV_h$ は，Einstein 計量 h において臨界値を取る．そこで第二変分を求める．

定理 (松本 2013)

h を Einstein 計量とし，$\mathrm{Ric}_h = 2(n-1)\lambda h$ とおく．
そのとき，h の変分 h_t に対し，$\psi = \mathrm{tf}(h^\bullet)$ が $\nabla^*\psi = 0$ を満たすならば

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\int_M Q_{h_t}\, dV_{h_t}\right)\bigg|_{t=0} = -\frac{1}{4}\int_M \langle H\psi, \psi\rangle_h\,,$$

ただし $\quad H = \prod_{m=0}^{n/2-1}(\Delta_{\mathrm{L}} - 4(n-1)\lambda + 4m(n-2m-1)\lambda).$

系

Δ_{L} の最小固有値が $\geq 4(n-1)\lambda$ なら，$-\int_M Q_h dV_h$ は h において弱安定．

参考文献

講演中に言及した内容が述べられている文献の**年代順**リストです．雑誌の巻号などは省略しています．

- Fefferman, Monge–Ampère equations, the Bergman kernel, and geometry of pseudoconvex domains, *Ann. of Math.* (1976)
- Fefferman & Graham, Conformal invariants, in *The mathematical heritage of Élie Cartan (Lyon, 1984)*, Astérisque (1985)
- Osgood, Phillips, & Sarnak, Extremals of determinants of Laplacians, *J. Funct. Anal.* (1988)
- Osgood, Phillips, & Sarnak, Compact isospectral sets of surfaces, *J. Funct. Anal.* (1988)
- Branson & Ørsted, Explicit functional determinants in four dimensions, *Proc. Amer. Math. Soc.* (1991)
- Graham & Lee, Einstein metrics with prescribed conformal infinity on the ball, *Adv. Math.* (1991)
- Branson, Chang, & Yang, Estimates and extremals for zeta function determinants on four-manifolds, *Comm. Math. Phys.* (1992)
- Graham, Jenne, Mason, & Sparling, Conformally invariant powers of the Laplacian, I. Existence, *J. London Math. Soc.* (1992)
- Branson, *The Functional Determinant* (1993)
- Branson, Sharp inequalities, the functional determinant, and the complementary series, *Trans. Amer. Math. Soc.* (1995)

参考文献（つづき）

- Chang & Yang, Extremal metrics of zeta function determinants on 4-manifolds, *Ann. of Math.* (1995)
- Branson, An anomaly associated with 4-dimensional quantum gravity, *Comm. Math. Phys.* (1996)
- Biquard, *Métriques d'Einstein asymptotiquement symétriques* (2000)
  ※英訳あり：*Asymptotically Symmetric Einstein Metrics* (2006)
- Chruściel & Herzlich, The mass of asymptotically hyperbolic Riemannian manifolds, *Pacific J. Math.* (2003)
- Graham & Zworski, Scattering matrix in conformal geometry, *Invent. Math.* (2003)
- Biquard, ed., *AdS/CFT Correspondence: Einstein Metrics and Their Conformal Boundaries* (2005)
- Lee, *Fredholm Operators and Einstein Metrics on Conformally Compact Manifolds* (2006)
- Anderson, Einstein metrics with prescribed conformal infinity on 4-manifolds, *Geom. Funct. Anal.* (2008)
- Gursky & Malchiodi, Non-uniqueness results for critical metrics of regularized determinants in four dimensions, *Comm. Math. Phys.* (2012)
- Matsumoto, A GJMS construction for 2-tensors and the second variation of the total Q-curvature, *Pacific J. Math.* (2013)