有界強擬凸領域における完備アインシュタイン計量の変形

松本佳彦

東京工業大学大学院理工学研究科

2016 年 3 月 16 日

問題

Ω を Stein 多様体 Y^n ($n \geq 2$) の有界強擬凸領域とする.

定理（Cheng–Yau 1980）

定数 $\lambda < 0$ を固定する.
そのとき，Ω 上には $\mathrm{Ric}(g) = \lambda g$ を満たす完備 Kähler 計量がただ一つ存在する.

われわれは次の問題について考える.

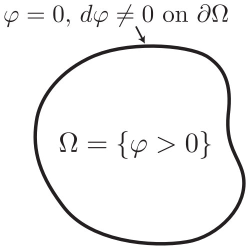
問題

Cheng–Yau 計量を Einstein 性を保ちつつ変形せよ．その際,

- Kähler 性の要請を外す.
- 一方で，**漸近的複素双曲性**は満たされたままにする.

結論：$n \geq 3$ ならば「自在に」できる．——というのが今日の話.

Cheng–Yau の完備 Kähler-Einstein 計量とは



Einstein 定数 λ を持つ Cheng–Yau 計量は,
$\lambda = -(n+1)$ という正規化のもとで

$$g_{i\bar{j}} = \partial_i \partial_{\bar{j}} (-\log \varphi) + (Y \text{ 上の Hermite 形式})$$

と表される．ただし φ は Ω の 正値 定義関数,
$\overline{\Omega}$ 上で $C^{n+1,\alpha}$ 級（$0 < \alpha < 1$ は任意）.

例

$\mathbb{C}^n$ の単位開球 $\Omega = B^n$ の Cheng–Yau 計量は

$$g = \frac{1}{(1-|z|^2)^2} \sum (\bar{z}^j dz^j)(z^k d\bar{z}^k) + \frac{1}{1-|z|^2} \sum dz^j d\bar{z}^j.$$

これは**複素双曲計量**に他ならない．正則断面曲率は負の定数.

$\partial\Omega$ は，Cheng–Yau 計量 g によって無限遠境界と見なされる.
CR 多様体としての $\partial\Omega$ のことを，g の **conformal infinity** と呼ぶ.

領域・境界対応の文脈における Cheng–Yau 計量の役割

Bochner 1943, Fefferman 1974, ⋯⋯：Stein 多様体の有界強擬凸領域 Ω について

$$\{\,\Omega \text{ の双正則同値類}\,\} \cong \{\,\partial\Omega \text{ の CR 同値類}\,\}.$$

Cheng–Yau 計量 g は**領域・境界対応の微分幾何化**を与えていると考えられる.

- g は Ω の複素構造で決まる.
- g の漸近展開は $\partial\Omega$ の CR 構造の曲率によって相当程度記述できる.

—— Fefferman 1976, Graham 1987

応用例：

- Renormalized Chern integral と Burns–Epstein 不変量

—— Burns–Epstein 1988 & 1990, 丸亀 2016?

- Renormalized volume と全 Q-prime 曲率

—— Case–Yang 2013, 平地 2014, 平地 – 丸亀 – 松本

Cheng–Yau 計量の漸近的複素双曲 (ACH) 性

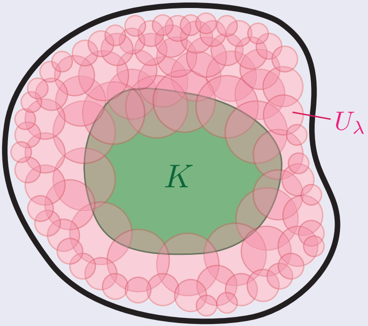
次は，Cheng–Yau 計量の持つ ACH 性のひとつの表れである．
$\mathbb{C}H^n$ をモデルとする座標近傍系を外縁部に行くほど近似が良くなるようとれる．

B_r を $\mathbb{C}H^n$ の半径 r の開測地球とする．また $k \in \mathbb{N}$, $\alpha \in (0,1)$ を固定する．

補題（複素双曲アトラスの存在）

$\exists r > 0$ s.t.
$\forall \varepsilon > 0$ に対し，$\exists K \subset \Omega$ コンパクト，
$\exists \{ \Phi_\lambda \colon U_\lambda \to B_r$ 微分同相 $\}$ s.t.

- $\{ U_\lambda \}$ が $\Omega \setminus K$ を被覆する．
- $\left\| (\Phi_\lambda^{-1})^* g - g_{\mathbb{C}H^n} \right\|_{C^{k,\alpha}(B_r)} < \varepsilon$.



これは bounded geometry 条件の精密化といえる．

Cheng–Yau 計量の二面性

Cheng–Yau 計量は

Kähler-Einstein かつ 漸近的複素双曲 (ACH).

- Kähler(-Einstein) 性 $\rightsquigarrow$ 「よい」微分作用素同士が一致する.
- ACH 性 $\rightsquigarrow$ $\mathbb{C}H^n$ の持つ解析的性質を（ある程度）引き継ぐ.

関連研究の中での位置づけ

ACH-Einstein 計量

- Biquard 2000：複素双曲計量の変形
- **今回の結果：Cheng–Yau 計量の変形**

AH-Einstein 計量

- Graham–Lee 1991：双曲計量の変形
- Lee 2006：Conformal infinity $[h]$ が $Y([h]) \geq 0$ を満たし，かつ $K_g \leq c_n$ であるような AH-Einstein 計量 g の変形

AQH-Einstein, AOH-Einstein 計量

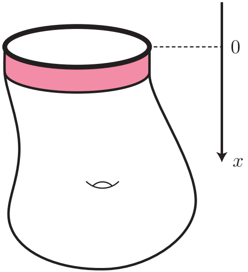
- Biquard 2000：四元数双曲計量，八元数双曲計量の変形

ランク ≥ 2 の対称空間をモデルとする場合

- Biquard–Mazzeo 2006 & 2011

ACH 計量の一般的定義の方針

$\overline{X}$ を実 $2n$ 次元境界付き多様体とする ($n \geq 2$).
$M := \partial\overline{X}$ の近傍を $M \times [0, \varepsilon)$ と同一視する.



次のような漸近挙動を持つ X 上の Riemann 計量を ACH 計量と呼びたい：

$$g \sim g_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{4dx^2}{x^2} + \frac{\theta^2}{x^4} + \frac{L_\theta}{x^2}\right).$$

ただし L_θ は（一般化された）CR 構造の Levi 形式である（θ は接触形式）.

CR 構造の可積分性は必ずしもいらない．欲しいのは L_θ だけ.

Partially integrable CR 構造 ——ACH 計量の conformal infinity

重要なことは L_θ の Hermite 計量としての well-definedness．つまり

$$d\theta \equiv i \sum h_{\alpha\overline{\beta}} \theta^\alpha \wedge \theta^{\overline{\beta}} \mod \theta$$

であること．言い換えれば

$$[\Gamma(T^{1,0}M), \Gamma(T^{1,0}M)] \subset \Gamma(T^{1,0}M \oplus \overline{T^{1,0}M}).$$

定義

上記の条件を満たす概 CR 構造 J を **partially integrable CR 構造**と呼ぶ．
超平面分布を備えた多様体 (M^{2n-1}, H) に対し，それらの全体を PCR(M) と書く．

- H 上の概 CR 構造は，ある Grassmann バンドルの C^∞ 切断．
  Partial integrability 条件は，$\partial\Omega$ 上ではファイバーの局所座標を適切にとれば線型関係式として表示される．したがって例は無数に得られる．
- Chern–Moser 1975 が考察しているのも，実は可積分性ではなくてこの条件．

重み付き Hölder 空間

ACH 計量に対する Hölder 空間 $C^{k,\alpha}(X;E)$：複素双曲アトラスを用いて定義.
さらに，外縁部における減衰／増大度をとらえるため，次の空間を導入する.

定義

$\delta \in \mathbb{R}$ に対し

$$C^{k,\alpha}_{\delta}(X;E) := x^{\delta} C^{k,\alpha}(X;E), \qquad \|s\|_{C^{k,\alpha}_{\delta}} := \left\|x^{-\delta} s\right\|_{C^{k,\alpha}}.$$

重み $\delta > 0$ を持つ Hölder 空間 $C^{k,\alpha}_{\delta}(X; S^2 T^* X)$ の元でモデル計量を摂動しても，
漸近的な振る舞いの主要部は変化しないと考えられる.

ACH 計量の定義

定義

X 上の Riemann 計量 g が **ACH** であるとは,

$$g = g_0 + k, \qquad k \in C^{2,\alpha}_{\delta}(X; S^2 T^* X), \quad \delta > 0$$

と表されることをいう．ただし g_0 はある (J, θ) に関するモデル ACH 計量：

$$g_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{4dx^2}{x^2} + \frac{\theta^2}{x^4} + \frac{L_\theta}{x^2}\right).$$

J を ACH 計量 g の **conformal infinity** と呼ぶ.

Cheng–Yau 計量は ACH であり，その conformal infinity は $\partial\Omega$ の通常の CR 構造.

主定理の主張——CY 計量の「自在な」変形可能性

主定理

3 次元以上の Stein 多様体の有界強擬凸領域 Ω において次が与えられたとする：

$$J \in \mathrm{PCR}(\partial\Omega), \qquad \text{ただし } \|J - J_{\mathrm{std}}\|_{C^{2,\alpha}} \text{ は十分小さい.}$$

そのとき，J を conformal infinity とする ACH 計量で Einstein なものが存在する.
さらに，ACH-Einstein 計量 g は「局所一意性」を持つ.

「局所一意性」の部分は Biquard が証明している (2000).

主定理における「局所一意性」の正確な内容

定理（ACH-Einstein 計量の局所一意性，Biquard 2000）

g を ACH-Einstein 計量とする．また，g' を別の ACH-Einstein 計量で

- $g' - g \in C^{2,\alpha}_{\delta}$ $(\delta > 0)$，かつ
- $\|g' - g\|_{C^{2,\alpha}_{\delta}}$ は十分小さいようなものとする．

そのとき，次のような $F \in \mathrm{Diff}(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega}, \overline{\Omega})$ が存在する：

$$F^* g' = g, \qquad F|_{\partial\Omega} = \mathrm{id}_{\partial\Omega}\,.$$

次の主張とは異なることに注意せよ．

予想

g を ACH-Einstein 計量とする．また，g' を別の ACH-Einstein 計量で

- $g' - g \in C^{2,\alpha}$，かつ
- $\|g' - g\|_{C^{2,\alpha}}$ は十分小さいようなものとする．

そのとき，もし g と g' の conformal infinity が一致しているならば，（以下同じ）．

証明の流れ

1. 逆写像定理を適用するセットアップと
線型化作用素の ACH 条件下での解析（核のウェイトへの依存性）
2. $T^{1,0}$ 値 L^2 (Dolbeault) コホモロジーの消滅への帰着とその証明
    - 境界近傍における L^2 コホモロジーの消滅への帰着
    - Morrey–Kohn–Hörmander 型 L^2 評価
    - （3 次元の場合のみ）重み付き L^2 コホモロジーの利用

前半：Cheng–Yau 計量の ACH 性を利用．この部分は Biquard の議論．
後半：さらに Kähler-Einstein 性を利用する．ここがオリジナル．

線型化作用素

線型解析への帰着

次の写像が同型写像であること（ただし δ は小さい正の数）を証明すれば，逆写像定理によって主定理が従う：

$$\mathcal{E}'_g = \frac{1}{2}(\nabla^*\nabla - 2\mathring{R})\colon C^{2,\alpha}_\delta(S^2T^*\Omega) \to C^{0,\alpha}_\delta(S^2T^*\Omega).$$

これは，次の Bianchi ゲージ条件下の Einstein 作用素の線型化である：

$$\mathcal{E}_g(h) := \mathrm{Ric}(g+h) - \lambda(g+h) + \delta^*_{g+h}\left(\delta_g h + \frac{1}{2}d\,\mathrm{tr}_g\, h\right).$$

ただし $\lambda = -(n+1)$，g は ACH 計量．上記の「帰着」は次の補題による．

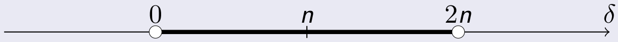
補題（Biquard）

$\mathrm{Ric}(g) < 0$，$h \in C^{2,\alpha}_\delta(S^2T^*\Omega)$，さらに $g+h$ は正定値とする．
そのとき，$\mathcal{E}_g(h) = 0$ ならば $g+h$ は Einstein.

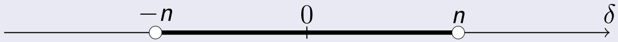
$\ker \mathcal{E}'_g$ のウェイトへの依存性

命題（Biquard 2000）

$\mathcal{E}'_g\colon C^{2,\alpha}_\delta \to C^{0,\alpha}_\delta$ は次の範囲で Fredholm かつ dim ker = dim coker.



また，$\mathcal{E}'_g\colon H^2_\delta \to L^2_\delta$ も次の範囲で Fredholm かつ dim ker = dim coker.



さらに，上記の Fredholm レンジにおいて，$\ker \mathcal{E}'_g$ はすべて互いに等しい：

$$\ker(\mathcal{E}'_g \text{ on } C^{2,\alpha}_\delta) = \ker(\mathcal{E}'_g \text{ on } H^2_\delta) = \ker_{L^2} \mathcal{E}'_g.$$

この「範囲」は，$\mathbb{C}H^n$ のときに $\mathcal{E}'_g$ が同型を与えるような範囲として見出される.

ACH 計量の解析は $\mathbb{C}H^n$ の場合の解析に帰着できる

というのが趣旨である（証明には，もちろん複素双曲アトラスを使う）.

他の微分作用素の場合

例

$\mathbb{C}H^n$ において，関数に対するラプラシアン Δ を考えると，$\Delta\colon C^{2,\alpha}_{n+\delta} \to C^{0,\alpha}_{n+\delta}$, $\Delta\colon H^2_\delta \to L^2_\delta$ は次の範囲で同型写像：

このことから，一般の ACH 計量についても，同じ範囲で Δ の Fredholm 性と $\dim\ker = \dim\operatorname{coker}$ が従う（実際には同型となる）.

同様のことが，楕円型 幾何的 自己共役微分作用素について一般に証明できる.

L^2 コホモロジーの消滅への帰着

今回用いる Kähler-Einstein 計量の著しい性質は次のものである.

観察（小磯 1983）

Kähler-Einstein 計量 g に関し

$$\{\text{タイプ } (0,2) \text{ の対称テンソル}\} \text{ 上の } \mathcal{E}'_g$$

は，計量による同型 $\wedge^{0,1} \cong T^{1,0}$ を通じて

$$\{\, T^{1,0} \text{ 値 } (0,1) \text{ 形式}\,\} \text{ の対応する部分空間上の } \Delta_{\bar{\partial}}$$

に一致する.

これに基づき，次がわかる.

補題

Cheng–Yau 計量について

$$H^{0,1}_{(2)}(\Omega; T^{1,0}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \ker_{L^2} \mathcal{E}'_g = 0.$$

L^2 コホモロジーの完全列の利用

$$\cdots \to H_c^{0,1}(\Omega; T^{1,0}) \to H_{(2)}^{0,1}(\Omega; T^{1,0}) \to \varinjlim_K H_{(2)}^{0,1}(\Omega \setminus K; T^{1,0}) \to \cdots$$

は完全列である．ただし $\varinjlim_K$ において K は Ω のコンパクト部分集合をわたる．

ここで，Ω の Stein 性によって次が成り立つ．

補題（Andreotti–Vesentini 1965）

$$H_c^{0,1}(\Omega; T^{1,0}) = 0.$$

よって，あとは $\varinjlim_K H_{(2)}^{0,1}(\Omega \setminus K; T^{1,0}) = 0$ を示せばよい．

主張

$\mathcal{U}_\rho = \{0 < \varphi < \rho\} \subset \Omega$ とおくと，十分小さい $\rho > 0$ に対して

$$H_{(2)}^{0,1}(\mathcal{U}_\rho; T^{1,0}) = 0.$$

（ただし φ は境界まで滑らかに取りなおしておく．）

$\overline{\partial}$-Neumann 条件

示したいことは $H^{0,1}_{(2)}(\mathcal{U}_\rho; T^{1,0}) = 0$ であった．いつものように評価式を作りたい．

補題

$H^{0,1}_{(2)}(\mathcal{U}_\rho; T^{1,0}) = 0$ は次の評価から従う：

$$\|\alpha\|^2 \leq C(\|\overline{\partial}\alpha\|^2 + \|\overline{\partial}^*\alpha\|^2), \qquad \alpha \in \mathrm{dom}\,\overline{\partial} \cap \mathrm{dom}\,\overline{\partial}^* \subset L^{0,1}(\mathcal{U}_\rho; T^{1,0}).$$

ところで，$\alpha \in \mathrm{dom}\,\overline{\partial}^*$ というのは非自明な境界条件を与える．

補題

ξ を $\partial\mathcal{U}_\rho = \{\varphi = \rho\}$ に沿った unit normal $(1,0)$ ベクトル場として

$$\iota_{\overline{\xi}}\alpha = 0 \qquad \text{on } \partial\mathcal{U}_\rho \qquad \text{（}\overline{\partial}\text{-}\textbf{Neumann 条件}\text{）}$$

を満たす $\alpha \in C^\infty_c\wedge^{0,1}(\overline{\mathcal{U}}_\rho; T^{1,0})$ の全体は，グラフノルム
$\alpha \mapsto (\|\alpha\|^2 + \|\overline{\partial}\alpha\|^2 + \|\overline{\partial}^*\alpha\|^2)^{1/2}$ に関して $\mathrm{dom}\,\overline{\partial} \cap \mathrm{dom}\,\overline{\partial}^*$ において稠密である．

L^2 評価式の導出

Morrey–Kohn–Hörmander 評価の幾何的バージョンを使う.

補題（Andreotti–Vesentini 1965）

$\overline{\partial}$-Neumann 条件を満たす $\alpha \in C_c^\infty \wedge^{0,1}(\overline{\mathcal{U}}_\rho; T^{1,0})$ に対し

$$\|\overline{\partial}\alpha\|^2 + \|\overline{\partial}^*\alpha\|^2 = \|\nabla''\alpha\|^2 + (\mathrm{Ric}^\circ\,\alpha, \alpha) + (\mathring{S}\alpha, \alpha) + \int_{\partial\mathcal{U}_\rho} \frac{1}{|\partial \log \varphi|} L_{\log\varphi - \log\rho}(\alpha, \alpha).$$

ただし $\mathring{S}$ は $T^{1,0}$ の曲率の作用を表す.

しかし $\partial\mathcal{U}_\rho$ は <u>強擬凹</u> であるため，$L_{\log\varphi - \log\rho}$ は負定値である．どうするか？

Hörmander による「条件 $Z(q)$」のアイディアを真似して，

$$\|\overline{\partial}\alpha\|^2 + \|\overline{\partial}^*\alpha\|^2 = \|\nabla'_b\alpha\|^2 + \|\nabla_{\overline{\xi}}\alpha\|^2 + \cdots$$

という形に書き換えるとうまくいく！

$n \geq 4$ の場合の結論

以上の議論によって，次の評価式が得られる.

命題

任意の $\varepsilon > 0$ に対し，十分に $\rho > 0$ を小さくとれば，
$\overline{\partial}$-Neumann 条件を満たす任意の $\alpha \in C_c^\infty \wedge^{0,1}(\overline{\mathcal{U}}_\rho; T^{1,0})$ に対し

$$\|\overline{\partial}\alpha\|^2 + \|\overline{\partial}^*\alpha\|^2 \geq (2n - 6 - \varepsilon)\,\|\alpha\|^2$$

が成り立つ．したがって同じ評価式が $\mathrm{dom}\,\overline{\partial} \cap \mathrm{dom}\,\overline{\partial}^*$ でも成り立つ.

系

$n \geq 4$ のとき

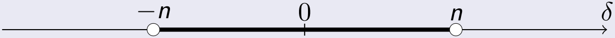
$$H^{0,1}_{(2)}(\mathcal{U}_\rho; T^{1,0}) = 0.$$

こうして主定理が $n \geq 4$ の場合に示される.

$n = 3$ の場合：アプリオリ減衰の利用

Recall:

次の範囲で $\mathcal{E}'_g \colon H^2_\delta \to L^2_\delta$ の核は変化しない.



このことから実は，L^2 コホモロジーの消滅を示すかわりに，
重み付き L^2 コホモロジーの消滅を示すのでもかまわないことになる.
これで証明できる.

注

同じテクニックで Donnelly–Fefferman の定理 (1983) の別証明も得られる.

まとめ

主定理（再掲）

3 次元以上の Stein 多様体の有界強擬凸領域 Ω において次が与えられたとする：

$$J \in \mathrm{PCR}(\partial\Omega), \qquad ただし\ \|J - J_{\mathrm{std}}\|_{C^{2,\alpha}}\ は十分小さい.$$

そのとき，J を conformal infinity とする ACH 計量で Einstein なものが存在する．さらに，ACH-Einstein 計量 g は「局所一意性」を持つ．

証明は次のような手続きで行われた．

- ACH 計量の一般論による $\ker \mathcal{E}'_g$ のウェイト依存性の解析
- Kähler-Einstein 性を用いた L^2 コホモロジーの消滅への帰着とその証明

未解決問題

1. $n = 2$ のときはどうなのか？
   - $H^{0,1}_{(2)}(\mathcal{U}_\rho; T^{1,0}) = 0$（あるいはその重み付きバージョン）を示すという手法に無駄があるのかもしれない．直接 $\varinjlim H^{0,1}_{(2)}$ を考察すべき？
   - それとも，同じ主張は成立しない？
2. 可積分な J の変形に対しては，Cheng–Yau 計量ができているのか？
   - $n \geq 3$ のとき，可積分な J の微小変形は領域の微小変形で与えられる (Kilemidjian 1976 & 1977, Hamilton 1977).
   - 領域の微小変形に対し，CY 計量の変化の $C^{2,\alpha}$ ノルムもたぶん小さいだろう．
   - しかし「局所一意性」は，重み付き $C^{2,\alpha}$ 位相を使う形でしか知られていない．
3. 複素構造の変形との関係は？
   - $H^{0,1}(\Omega; T^{1,0})$ を考えているのだから，何か関係があるはず．
   - 2. が肯定的に解決されれば，可積分な J の変形に対する ACHE の構成には，可積分な複素構造の変形が付随していることになる．
   - 一般にはどうなのか？　よい概複素構造の変形が付随しているのではないか？