有界強擬凸領域における
完備アインシュタイン計量の変形

松本 佳彦（東京工業大学）*

1 はじめに

本稿における考察の舞台は，n 次元 Stein 多様体 Y の滑らかな境界を持つ有界強擬凸領域 Ω である（$n \geq 2$ とする．また，「有界」という語は「相対コンパクト」の意味で用いている）．本稿で単に「有界強擬凸領域」と言ったときは，特に断らないかぎり，ある Stein 多様体のそれを指しているものとする．ただし，以下で述べる内容は $X = \mathbb{C}^n$ の領域に限っても非自明なので，読者はその場合だけを念頭に置いてもよい．

よく知られているように，上述のような領域間の双正則写像と境界間の CR 同値写像は「等価」である．すなわち次のことが成り立つ：有界強擬凸領域 $\Omega_1 \subset Y_1$, $\Omega_2 \subset Y_2$ に対し，任意の双正則写像 $F\colon \Omega_1 \to \Omega_2$ は領域の閉包への滑らかな拡張 $\overline{F}\colon \overline{\Omega}_1 \to \overline{\Omega}_2$ を持ち，拡張 $\overline{F}$ の境界への制限 $f := \overline{F}|_{\partial\Omega_1}\colon \partial\Omega_1 \to \partial\Omega_2$ は自動的に CR 微分同相写像（CR 構造を保つ微分同相写像）となるが，こうして得られる写像

$$\{\, F\colon \Omega_1 \to \Omega_2 \mid F \text{ は双正則} \,\} \to \{\, f\colon \partial\Omega_1 \to \partial\Omega_2 \mid f \text{ は CR 微分同相} \,\} \tag{1.1}$$

は全単射である*1．少し違う見方をすれば，領域 Ω の双正則同値類と境界 $\partial\Omega$ の CR 同値類の間には一対一対応があるということでもある：

$$\{\, \Omega \mid \Omega \text{ は有界強擬凸領域} \,\} / \sim_{\text{bihol}} \cong \{\, \partial\Omega \mid \Omega \text{ は有界強擬凸領域} \,\} / \sim_{\text{CR-diffeo}} . \tag{1.2}$$

ひとまず，(1.2) のことを「領域・境界対応」と呼んでおこう．

今回の議論におけるもうひとつの大前提は，有界強擬凸領域 Ω 上には，次の定理に述べる **Cheng–Yau 計量**と呼ばれる標準的な Kähler 計量があるという事実である．

定理 1 (Cheng–Yau [10])**.** 有界強擬凸領域 Ω 上には，負スカラー曲率を持つ完備 Kähler-Einstein 計量が存在する．この計量は（正定数倍を除き）一意的で，したがってまた双正則不変である．

---

* 日本学術振興会特別研究員-PD．Email: matsumoto@math.titech.ac.jp

*1 難しいのは写像 (1.1) の well-definedness，つまり F に対する $\overline{F}$ の存在の証明である．これは $Y_1 = Y_2 = \mathbb{C}^n$ のときは Fefferman [13]，一般には Bedford–Bell–Catlin [2] によって示された．全射性は Bochner–Hartogs の定理 [5] （Hörmander [21] の定理 2.3.2′）とその Kohn–Rossi [23] による拡張から従う（Burns–Shnider–Wells [7] も参照せよ）．単射性は最大値原理から明らかである．

この Cheng–Yau 計量 g は，$\mathrm{Ric}(g) = -(n+1)g$ という正規化のもとで次の形で与えられる：

$$g_{i\bar{j}} = \partial_i \partial_{\bar{j}} \log(1/\varphi). \tag{1.3}$$

ここで φ は Ω のある定義関数である（Ω 上で $\varphi > 0$ となるようにとる）．この関数 φ は Ω 上 C^∞ 級であるが，境界における正則性は一般には $\varphi \in C^{n+1,\alpha}(\overline{\Omega})$ しか成り立たない．

われわれは，Cheng–Yau 計量 g を「領域・境界対応 (1.2) を微分幾何化するもの」として捉える．そう捉えることができるのは，計量 g は領域 Ω の複素構造によって定められている一方で，境界 $\partial\Omega$ の局所 CR 構造によっても「漸近的に」定まるからだ．つまり，たとえば，2 つの有界強擬凸領域 Ω_1, Ω_2 に対し，各々のある境界点の近傍の間だけで定義された局所的な双正則写像があるとき，Cheng–Yau 計量 g_1, g_2 のそれらの近傍への制限は「漸近的に」一致する．あるいは，関数 φ の境界における漸近展開を考えると，その展開の係数はあるオーダーまで境界の Moser 標準形 [11] の係数によって記述できる（正確な意味については [16] を見よ）．計量 g を規定する方程式が Ω において微分幾何的に与えられていることと，g が漸近的に $\partial\Omega$ の微分幾何によって決定されることの両面において，g は対応 (1.2) を微分幾何化している[*2]．

$$\begin{tikzcd} \Omega\text{ の複素構造} \arrow[dr] & \\ & \text{Cheng–Yau 計量} \\ \partial\Omega\text{ の CR 構造} \arrow[ur, "\text{漸近的}"'] & \end{tikzcd} \tag{1.4}$$

Cheng–Yau 計量を利用することで，Ω の双正則不変量であって，$\partial\Omega$ の田中＝Webster 曲率と捩率によって具体的に表示できるようなものが構成できる．こうして得られるスカラー値不変量としては，Burns–Epstein 不変量 [8,6,26] と（最近定義された）Q-prime 曲率の全積分 [9,17,18] が知られている．スカラー値に限らなければ，CR 山辺ラプラシアンとその高階化もそういう例とみなせる [22,15,19]．

さて，タイトルにあるように，われわれは有界強擬凸領域 Ω における Einstein 計量の変形を，O. Biquard の枠組み [3] に従って論じる．変形のもとになるのは Cheng–Yau 計量で，新しく作られる計量は再び Ω 上の完備 Einstein 計量になる．この新しい計量の意義は，**微分幾何的な領域・境界対応** (1.4) **を一般化することにある**．ただし，そこにはもはや通常の複素構造は現れないし，通常の CR 構造も現れない．新しい計量について現在わかっていることは，ある仕方で一般化された $\partial\Omega$ 上の CR 構造たちと関係があることだ——というよりも，新しい計量は一般化された CR 構造に対応する形で構成される．これらの「一般化された CR 構造」は partially integrable CR 構造と呼ばれる．また，新しい計量は「漸近的複素双曲計量（ACH 計量）」と呼ばれる計量のクラスにおいて

[*2] Bergman 計量も図式 (1.4) にフィットする点では同じである．しかし Cheng–Yau 計量には，漸近展開を具体的に書き下すことができるという利点がある．一方で，関数論との関係の明瞭さという点では，Bergman 計量に分がある．

作られる.

$$\begin{tikzcd}
\text{境界に partially integrable CR 構造を備えた領域} \arrow[dr] & \\
& \text{漸近的複素双曲 Einstein 計量} \\
\text{境界の partially integrable CR 構造} \arrow[ur, "\text{漸近的}"'] &
\end{tikzcd} \tag{1.5}$$

各々の漸近的複素双曲計量 g には，g の共形無限遠 (conformal infinity) と呼ばれる境界上の partially integrable CR 構造 J が付随する．Cheng–Yau 計量も漸近的複素双曲計量であり，その共形無限遠は $\partial\Omega$ の標準的な CR 構造 J_{std} なのだが，われわれは J_{std} を摂動して，対応する漸近的複素双曲 Einstein 計量を構成しようとするのである．すなわちこれは一種の Dirichlet 問題である．

今回は大域的な存在の問題，すなわち (1.5) の上の矢印を扱う[*3]．主定理を述べよう．

定理 2 (松本 [30])**.** $n \geq 3$ と仮定する．Ω を有界強擬凸領域，J_{std} を $\partial\Omega$ の標準的な CR 構造，J を $C^{2,\alpha}$ 位相に関して J_{std} に十分近い partially integrable CR 構造とする．そのとき，Ω 上の漸近的複素双曲 Einstein 計量 g であって，J を共形無限遠とするものが存在する．

Biquard が [3] において証明したのは，Ω が $\mathbb{C}^n$ の単位開球 B^n の場合であった（この場合，次元は $n \geq 2$ でよかった）．今回の結果は，次元の制約 $n \geq 3$ のもとで，同じことが一般の領域で成立するというものである．なお，計量 g には「局所的一意性」がある．これは [3] ですでに一般的に議論されている．

本稿の残りにおける目標は，$\Omega = B^n$ の場合と一般の領域の場合の違いを説明することではなく，むしろそれらに共通する枠組みの説明——つまり [3] の第 1 章の解説——である[*4]．それによって定理 2 の証明は L^2 無限小 Einstein 変形の消滅定理に帰着される．これは $\Omega = B^n$ のときは明らかなのだが，一般の領域で示すには工夫が必要となる．この工夫については第 5 節でごく簡単に述べるが，詳しくは [30] を参照されたい（講演でももっと詳しく触れる）．

議論の枠組みを支えているのは，漸近的複素双曲計量に対する幾何的楕円型線型微分方程式の一般論である．これを第 4 節で説明する．そのための準備が第 3 節である．第 2 節は基本的な定義の説明にあてた．

2 いくつかの基本的定義

この節では，領域 Ω の強擬凸性について説明した上で，境界 $\partial\Omega$ の持つ構造の抽象化にあたる CR 構造の定義，およびその一般化である partially integrable CR 構造の定義を行う．以下本節では，単に「領域」と言ったときには，Stein とは限らない複素多様体の滑らかな境界を持つ領域を指す．

[*3] 下の矢印については松本が以前議論した [28, 27].

[*4] ただし [3] における記述には sketchy な箇所も見られる．これを読み解く上では，Lee [25] による漸近的双曲計量（複素ではなく実の場合）に対する類似の議論も参考になる．

強擬凸領域の最も基本的な例は単位開球 $B^n \subset \mathbb{C}^n$ である．一般に領域 Ω が**強擬凸**であるとは，境界 $\partial\Omega$ の各点において $\partial\Omega$ が ∂B^n の局所双正則像によって 2 次近似できることをいう．

強擬凸性は，実際には次で定義される Levi 形式を調べることによってチェックできる．複素多様体 X の領域 Ω に対し，Ω 上で正の値を持つ定義関数 $\varphi \in C^\infty(X)$ をとる．そのとき，点 $p \in \partial\Omega$ における正則接ベクトル $\xi, \eta \in T_p^{1,0}\partial\Omega := T_p^{1,0}X \cap \mathbb{C}T_p\partial\Omega$ に対し

$$L_\varphi(p)(\xi, \overline{\eta}) := -\partial\overline{\partial}\varphi(\xi, \overline{\eta})$$

と定める．こうして定義される $T^{1,0}\partial\Omega$ 上の Hermite 形式 L_φ を，φ の定める $\partial\Omega$ の Levi 形式という．Levi 形式 L_φ の共形類は φ の選び方によらない．そして Ω が強擬凸であるためには，L_φ が各点で正定値であることが必要十分である．

境界 $\partial\Omega$ が備えている（標準的な）CR 構造というのは，いま出てきた正則接束 $T^{1,0}\partial\Omega$ のことである．同じことだが，超平面束 $H := \mathrm{Re}\, T^{1,0}\partial\Omega \subset T\partial\Omega$ の概複素構造 $J \in \Gamma(\mathrm{End}(H))$ と言ってもよい（J は，その i 固有部分束が $T^{1,0}\partial\Omega$ に一致するようにとる）．一般に，3 次元以上の奇数次元の実多様体 M^{2n-1} に対し，超平面束 $H \subset TM$ とその上の概複素構造 J の組を概 CR 構造という．概 CR 構造 J は固有分解 $\mathbb{C}H = T^{1,0}M \oplus \overline{T^{1,0}M}$ を与える．そして，J が可積分，すなわち $\Gamma(T^{1,0}M)$ が Lie ブラケットについて閉じているとき，(H, J) を M 上の **CR 構造**と呼ぶ．CR 多様体 (M, H, J) の上に Levi 形式を定めるには，$\ker\theta = H$ となる微分 1 形式 θ をとる．そして

$$L_\theta(p)(\xi, \overline{\eta}) := -i\, d\theta(\xi, \overline{\eta})$$

とおく（$M = \partial\Omega$ の場合には，$\theta = \frac{i}{2}(\partial\varphi - \overline{\partial}\varphi)|_{T\partial\Omega}$ とすれば $L_\theta = L_\varphi$ となる）．領域の境界の場合と違って θ と $-\theta$ は対等なので，L_θ が正定値または負定値のときに (M, H, J) は**強擬凸**であるという——そしてそのときは $L_\theta > 0$ となるような θ を常に用いるものとする．$T^{1,0}M$ の局所余枠 $\{\theta^\alpha\}_{\alpha=1}^{n-1}$ が与えられているとき，J の可積分性によって $d\theta$ は

$$d\theta = i \sum_{\alpha,\beta=1}^{n-1} h_{\alpha\overline{\beta}}\theta^\alpha \wedge \theta^{\overline{\beta}} \mod \theta \tag{2.1}$$

と表されるから，局所的には Hermite 行列値関数 $(h_{\alpha\overline{\beta}})$ を Levi 形式と呼んでもよい．式 (2.1) が $\bmod \theta$ でなく正確に成り立つように 1 形式の組 $\{\theta^\alpha\}_{\alpha=1}^{n-1}$ を取ることもできる．さらに $(h_{\alpha\overline{\beta}})$ が単位行列になることを要請すれば，$\{\theta^\alpha\}$ の各点における自由度は $U(n-1)$ だけになる——というのが Chern–Moser [11] による強擬凸 CR 多様体に対する正規 Cartan 接続の構成の最初のステップである．

ところで，$d\theta$ が式 (2.1) のように表されるための条件としては，J の可積分性は実は過剰である．実際には次の条件だけでよい[*5]：

$$[\Gamma(T^{1,0}M), \Gamma(T^{1,0}M)] \subset \Gamma(T^{1,0}M \oplus \overline{T^{1,0}M}).$$

[*5] 概複素多様体の場合と違って，$T^{1,0}M \oplus \overline{T^{1,0}M}$（これは H の複素化に他ならない）は $\mathbb{C}TM$ よりランクが 1 だけ小さいことに注意されたい．

これを満たす概 CR 構造のことを **partially integrable CR 構造**と呼ぶ．したがって強擬凸 partially integrable CR 構造についても，可積分な場合と同様に，正規 Cartan 接続（あるいは田中＝Webster 接続）に基づく微分幾何が展開できる．

以下，(partially integrable) CR 構造には常に強擬凸性を仮定する．

3　漸近的複素双曲性の諸相

「漸近的複素双曲性」にはいくつかの定式化があり得る．われわれも 2 種類の定式化を与える（定義 1 と定義 2）．定義 1 は解析的議論のために本質的に重要と思われる性質を取りだしたもので，定義 2 はさらに共形無限遠が普通の partially integrable CR 多様体として定まることを要請したものである．定義 1 の定式化だけでどこまで議論を推し進められるかというのも興味深いが，次節で用いるのは定義 2 である．なおいずれの定式化も Biquard [3], Lee [25] を参考にしたものだが（さらに [4] にも読みやすい記述がある），定義 1 は，この形では既存の文献には現れていないと思う．

複素双曲空間 $\mathbb{C}H^n$ の半径 $\rho > 0$ の開球を B_ρ と書く．また $k \in \mathbb{N}$, $\alpha \in (0,1)$ とする．

定義 1． 非コンパクトな実 $2n$ 次元多様体 X 上の完備 Riemann 計量 g が $C^{k,\alpha}$ 級の**漸近的複素双曲性**を持つというのは，$\rho > 0$ を適切に選ぶと，任意の $\varepsilon > 0$ に対しコンパクト部分集合 $K \subset \Omega$ および X の中への微分同相写像の族 $\{\, \Phi_\lambda \colon B_\rho \to U_\lambda := \Phi_\lambda(B_\rho) \subset X \,\}$ を次を満たすように取れるということである：

(i) $\{\, U_\lambda \,\}$ は $X \setminus K$ を被覆する．
(ii) $\|\Phi_\lambda^* g - g_{\mathbb{C}H^n}\|_{C^{k,\alpha}(B_\rho)} < \varepsilon$ が成り立つ．

任意の k, α に対し $C^{k,\alpha}$ 級の漸近的複素双曲性を持つとき，単に漸近的複素双曲性を持つということにする．

上の定義に現れる族 $\{\, \Phi_\lambda \,\}$ を**複素双曲アトラス**と呼ぼう．Cheng–Yau 計量 g はこの意味で漸近的複素双曲性を持つ．実際には Einstein 性は無関係で，たとえば，境界まで滑らかな定義関数 $\varphi \in C^\infty(\overline{\Omega})$ によって式 (1.3) で定義される計量はすべて漸近的複素双曲性を持つ[*6]．

技術的にはさらに次のことが重要になる．これを複素双曲アトラスの**強一様局所有限性**とでも言っておこう．多様体 X 全体にわたってというだけでなく，ε についても一様性があるのがポイントである．

補題． Cheng–Yau 計量 g について，$\rho > 0$ および正整数 N を適切に選ぶと，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，上の (i), (ii) に加えてさらに次が満たされるように複素双曲アトラス $\{\, \Phi_\lambda \,\}$ をとることができる：

[*6] Cheng–Yau [10] はそういう計量が bounded geometry を持つことについて議論しているが，これはその精密化にあたる．証明のひとつの方法は接触構造の局所自明性を用いるものである（Biquard [3] の方法）．もうひとつ，[13] の第 1 部冒頭で行われているように，$\partial\Omega$ の ∂B^n による 2 次近似を一様に与えることによる方法も考えられる．後者の方法だと Φ_λ を双正則写像とすることができて，場合によっては有用だと思う．

(iii) $U'_\lambda := \Phi_\lambda(B_{\rho/2})$ とおくと，$\{U'_\lambda\}$ がすでに $X \setminus K$ を被覆している．
(iv) 任意の点 $p \in X$ に対し，$p \in U_\lambda$ となる λ は高々 N 個しかない．

次に，共形無限遠がきちんと定まるような設定を導入する．X を非コンパクトな実 $2n$ 次元多様体で，滑らかなコンパクト境界つき多様体 $\overline{X}$ の内部として実現されているものとする．境界 $M := \partial\overline{X}$ 上に partially integrable CR 構造 (H, J) が与えられているとする．そのとき，$\overline{X}$ の境界近傍を $M \times [0, x_0)$ と同一視して，$M \times (0, x_0) \subset X$ において

$$g_0 = 2\frac{dx^2}{x^2} + \frac{\theta^2}{2x^4} + \frac{L_\theta}{2x^2}$$

という計量を考える（x は $M \times [0, x_0)$ の $[0, x_0)$ 成分の座標）．境界近傍において g_0 と一致するような Riemann 計量はこれから定義する意味での漸近的複素双曲計量とみなし，(H, J) をその共形無限遠と考える．さらに，g_0 と比べたときに境界における減衰を持つような摂動を施すことも許容する．これを記述するために，重みつき Hölder 空間

$$C^{2,\alpha}_\delta(S^2T^*X) := x^\delta C^{2,\alpha}(S^2T^*X)$$

を導入する．ここで $C^{2,\alpha}(S^2T^*X)$ は g_0 に関する通常の Hölder 空間である．

定義 2. X 上の Riemann 計量 g がある $\delta > 0$ について

$$g = g_0 + k, \qquad k \in C^{2,\alpha}_\delta(S^2T^*X)$$

と表されるとき，g は (H, J) を**共形無限遠**とする**漸近的複素双曲計量**であるという．

このような定義をする理由は，有界強擬凸領域において，Cheng–Yau 計量をはじめとする (1.3) 型の計量が定義 2 に述べた性質を持っているからだ[*7]．(H, J) を共形無限遠とする漸近的複素双曲計量 g は，定義 1 の意味で漸近的複素双曲性を持つ．さらに，強一様局所有限性を持つ複素双曲アトラスをとることができる．

4 漸近的複素双曲計量に対する幾何的線型微分作用素

Einstein 計量の変形を考察するためには，Einstein 方程式を線型化した微分方程式を考える．Kähler-Einstein 計量の場合には Einstein 方程式を複素 Monge–Ampère 方程式に帰着することができて，その線型化は Laplace 型の方程式となるのだった．一般の場合には Einstein 方程式を直接考えるのだが，そのままでは線型化作用素に同型性が期待できない．というのは，Einstein 方程式の解に明らかに一意性がないからである——Einstein 性は微分同相写像による引き戻しで保たれるからだ．そこで通常，基準となるある計量 g を利用して，ゲージ固定のための項を導入する．ここでは次のようにする：

$$\mathcal{E}(g') := \mathrm{Ric}(g') + (n+1)g' + \delta^*_{g'}\mathcal{B}_g g', \qquad \mathcal{B}_g g' := \delta_g g' + \frac{1}{2} d\,\mathrm{tr}_g\, g'.$$

[*7] もちろん $X = \Omega$ だが，$\overline{X}$ の可微分構造については注意が必要となる．$\overline{\Omega}$ の可微分構造を採用するのではなく，Ω の定義関数 φ に対し $\sqrt{\varphi}$ が $\overline{X}$ 上の滑らかな関数と見なされるようにする．この操作を Epstein–Melrose–Mendoza [12] は「$\overline{\Omega}$ の平方根をとる」と言っている．

未知計量 g' を $g + C^{2,\alpha}_\delta(S^2T^*X)$ の中で考える限り，方程式 $\mathcal{E}(g') = 0$ の解は自動的に $\mathcal{B}_g g' = 0$ を満たし，したがって Einstein 計量になる．

この準備のもとで，$\partial\Omega$ の標準的な CR 構造 J_{std} の $C^{2,\alpha}$ 近傍 $\mathcal{J}^{2,\alpha}$ をとり，

$$\mathcal{J}^{2,\alpha} \oplus C^{2,\alpha}_\delta(S^2T^*X) \to \mathcal{J}^{2,\alpha} \oplus C^{0,\alpha}_\delta(S^2T^*X), \qquad (J,\sigma) \mapsto (J, \mathcal{E}_{g_J}(g_J + \sigma)) \quad (4.1)$$

に $(J_{\mathrm{std}}, 0)$ において逆写像定理を適用することを考える．ただし g_J は $J \in \mathcal{J}^{2,\alpha}$ を共形無限遠とする漸近的複素双曲計量で，J に関して滑らか，かつ $g_{J_{\mathrm{std}}}$ が Cheng–Yau 計量に一致するようにしておく．もし $(J_{\mathrm{std}}, 0)$ の近傍で (4.1) が逆写像を持つならば，$(J, 0)$ の逆像を (J, σ) とすれば，$g' = g_J + \sigma$ が求める Einstein 計量となる．こうして，われわれの証明すべきことは次の同型定理になった．

主張． 有界強擬凸領域 Ω 上の Cheng–Yau 計量 g について，ある $\delta > 0$ に関し

$$\mathcal{E}'\sigma = \frac{1}{2}(\nabla^*\nabla - 2\mathring{R})\colon C^{2,\alpha}_\delta(S^2T^*X) \to C^{0,\alpha}_\delta(S^2T^*X) \quad (4.2)$$

は Banach 空間の同型写像である．

ここからの議論は純粋に偏微分方程式論的なものになると思うかもしれないが，実はそうではなく，微分作用素 $\mathcal{E}'$ が「幾何的に定義されたもの」であることを利用する．複素双曲空間 $\mathbb{C}H^n$ において $\mathcal{E}'$ の性質をじっくり考察し，それを複素双曲アトラスを用いて「貼り合わせ」て一般の Ω における主張を得るのである．

見通しをよくするために，「幾何的に定義された」微分作用素の概念を一般的に導入しておく．g を (H, J) を共形無限遠とする X 上の漸近的複素双曲計量とする．簡単のため，$P\colon \Gamma(E) \to \Gamma(E)$ という形の線型微分作用素のみを考える．

定義 3. (X, g) 上の線型微分作用素 $P\colon \Gamma(E) \to \Gamma(E)$ が**幾何的**であるとは，次が成り立つことをいう．

(i) E は $\mathbb{R}$ 上のある有限次元 $O(2n)$ 表現 V に付随するベクトル束．
(ii) P は，主 $O(2n)$ 接続から誘導される E の自然な接続によって，局所座標，局所枠の取り方や (X, g) に依存しない普遍的な表示で与えられる．

以下，P を m 階の幾何的楕円型線型微分作用素で，（形式的）自己共役性を持つものとする．特にこれを $\mathbb{C}H^n$ で考えることができる．単位開球モデルを採用して $\mathbb{C}H^n$ を B^n と同一視し，$x = \sqrt{1 - |z|^2}$ によって $B^n \setminus \{0\}$ をさらに $S^{2n-1} \times (0, 1)$ と同一視する．

重みつき Hölder 空間に関する P の mapping properties はその「動径方向成分」によって決まっている．「動径方向成分」を代数的なものとして取り出すために，次のような操作を行う．V を原点 $0 \in B^n$ におけるファイバー E_0 と同一視し，原点を始点とする測地線 γ をひとつ固定して（たとえば $\operatorname{Re} z^1$ 軸方向の測地線としてよい），それに沿った平行移動によってファイバー $E_{\gamma(t)}$ を $E_0 = V$ と同一視する．さらに $S^{2n-1} = U(n)/U(n-1)$ という表示により，$E|_{S^{2n-1}\times(0,1)}$ のセクションを $U(n) \times (0, 1)$ 上の $U(n-1)$ 同変な V 値関数とみなす．すると具体的な計算によって，P は

$$P = a_0(x\partial_x)^m + a_1(x\partial_x)^{m-1} + \cdots + a_m + O(x) \qquad \text{as } x \to 0 \quad (4.3)$$

という形で表されることがわかる．ただし各 a_i は $\mathrm{End}_{U(n-1)}(V)$ の元である．

上記の表示 (4.3) から，ある種の δ に対しては

$$P\colon C^{m,\alpha}_\delta(E) \to C^{0,\alpha}_\delta(E)$$

は同型写像にはならないことが期待される．実際，$u \sim x^\delta u_0$ $(u_0 \in V)$ というセクションを考えると，(4.3) によって

$$Pu \sim x^\delta((a_0u_0)\delta^m + (a_1u_0)\delta^{m-1} + \cdots + (a_m u_0))$$

である．もし $I(\delta) = a_0\delta^m + a_1\delta^{m-1} + \cdots + a_m \in \mathrm{End}_{U(n-1)}(V)$ が全射でなければ，$C^{0,\alpha}_\delta(E)$ には少なくとも，$u \sim x^\delta u_0$ という形のセクションの像にはならない元がある．

$\mathrm{End}_{U(n-1)}(V)$ 係数多項式

$$I(s) := a_0 s^m + a_1 s^{m-1} + \cdots + a_m$$

を P の**特性多項式**といい，$I(s)$ が同型写像とならない s を**特性ウェイト**と呼ぶ．P の自己共役性により，特性ウェイトは直線 $\mathrm{Re}\, s = n$ に関して対称に現れる*8．$|\mathrm{Re}\, s - n|$ の最小値を P の**特性半径**と呼ぶ．

L^2 空間において方程式 $Pu = v$（ここで $v \in L^2(E)$ とする）が一意的に解けるという仮定のもとで，次に述べる肯定的結果が得られる．この仮定は $P\colon H^m(E) \to L^2(E)$ が Hilbert 空間の同型写像となることと同値で，そのための条件は，

$$\|u\|_{L^2} \le C\|Pu\|_{L^2} \tag{4.4}$$

となる定数 $C > 0$ が存在することである．これを P に対する強圧性評価という．

補題． P の特性半径を $R > 0$ とし，また $\mathbb{C}H^n$ において (4.4) が成り立つと仮定する．そのとき，$\delta \in (n - R, n + R)$ に対し，$\mathbb{C}H^n$ における

$$P\colon C^{k,\alpha}_\delta(E) \to C^{k-m,\alpha}_\delta(E)$$

は Banach 空間の同型写像である．

こうして得られた複素双曲空間 $\mathbb{C}H^n$ における P^{-1} を複素双曲アトラスを用いて貼り合わせることで，一般の漸近的複素双曲空間においても P のパラメトリクスが構成できる．さらに次が成り立つ．

定理 3 (Biquard [3])**．** P を漸近的複素双曲空間 (X, g) 上の形式的自己共役 m 階幾何的楕円型線型微分作用素とし，その特性半径を $R > 0$ とする．さらに P が $\mathbb{C}H^n$ において強圧性評価 (4.4) を満たすと仮定する．そのとき，$\delta \in (n - R, n + R)$ に対し

$$P\colon C^{k,\alpha}_\delta(E) \to C^{k-m,\alpha}_\delta(E)$$

の核と余核はいずれも有限次元で（つまり P は Fredholm 作用素で），それらの次元は一致する．さらに自然な同一視 $\ker P = \ker_{(2)} P$ がある．ただし $\ker_{(2)} P$ は P を $L^2(E)$ 上の非有界作用素とみなしたときの核である．

---

*8 この n というのは $C^0_\delta(E) \subset L^2(E)$ となるような δ の下限である．

したがって，同型定理を得るために必要なのは

(i) $\mathbb{C}H^n$ における強圧性評価

(ii) 特性半径 R の計算

(iii) $\ker_{(2)} P$ の消滅の証明

ということになる．線型化 Einstein 作用素 $\mathcal{E}'$ については (i) は (4.2) から明らかで，(ii) も長いが単純な計算によって $R = n$ とわかる（これは [29] にある）．したがって，十分小さい $\delta > 0$ は Fredholm レンジ $(0, 2n)$ に入る．こうして，$\ker_{(2)} \mathcal{E}'$ の考察が最後に残る．

5　Einstein 計量の変形

前節までの考察によって，われわれの定理の証明は次の命題に帰着された．

命題. $n \geq 3$ とする．そのとき，有界強擬凸領域 Ω 上の Cheng–Yau 計量 g に対して，線型化 Einstein 作用素 $\mathcal{E}'$ の L^2-kernel は自明である．

ここからの考察は論文 [30] を参照してほしい．ここではアイディアのみを述べる．

- 小磯 [24] の観察により，$\mathcal{E}'$ は正則接束 $T^{1,0}\Omega$ に値を持つ $(0, 1)$ 形式に作用する Dolbeault ラプラシアン $\Delta_{\overline{\partial}}$（の部分空間への制限）と同一視される．それによって，命題は Cheng–Yau 計量に関する $H^{0,1}_{(2)}(\Omega; T^{1,0}\Omega)$ の消滅に帰着される．
- これを，L^2 コホモロジーの完全列（大沢 [31] にある）とコンパクト台コホモロジーの消滅（Andreotti–Vesentini [1] の結果）を用いて，境界近傍における L^2 評価に帰着する．
- Morrey–Kohn–Hörmander 評価を強擬凹領域にも適用可能にする Hörmander のテクニック [20] がある（Folland–Kohn [14] も参照）．これを用いて境界近傍における L^2 評価を行う．漸近的複素双曲性が再び重要な役割を果たす．
- $n = 3$ の場合には以上だけではうまくいかないので，Biquard の定理 3 を再利用し，$\ker_{(2)} \mathcal{E}'$ の消滅を重みつき L^2 評価に帰着して上述のテクニックを適用する．

こうしてわれわれの定理が得られる．

参考文献

[1] A. Andreotti and E. Vesentini, Carleman estimates for the Laplace-Beltrami equation on complex manifolds, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **25** (1965), 81–130.

[2] E. Bedford, S. Bell, and D. Catlin, Boundary behavior of proper holomorphic mappings, *Michigan Math. J.* **30** (1983), no. 1, 107–111.

[3] O. Biquard, Métriques d'Einstein asymptotiquement symétriques, *Astérisque* **265** (2000), vi+109.

[4] O. Biquard and R. Mazzeo, A nonlinear Poisson transform for Einstein metrics on product spaces, *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)* **13** (2011), no. 5, 1423–1475.

[5] S. Bochner, Analytic and meromorphic continuation by means of Green's formula, *Ann. of Math. (2)* **44** (1943), 652–673.

[6] D. Burns and C. L. Epstein, Characteristic numbers of bounded domains, *Acta Math.* **164** (1990), no. 1-2, 29–71.

[7] D. Burns Jr., S. Shnider, and R. O. Wells Jr., Deformations of strictly pseudoconvex domains, *Invent. Math.* **46** (1978), no. 3, 237–253.
[8] D. M. Burns Jr. and C. L. Epstein, A global invariant for three-dimensional CR-manifolds, *Invent. Math.* **92** (1988), no. 2, 333–348.
[9] J. S. Case and P. Yang, A Paneitz-type operator for CR pluriharmonic functions, *Bull. Inst. Math. Acad. Sin. (N.S.)* **8** (2013), no. 3, 285–322.
[10] S. Y. Cheng and S. T. Yau, On the existence of a complete Kähler metric on noncompact complex manifolds and the regularity of Fefferman's equation, *Comm. Pure Appl. Math.* **33** (1980), no. 4, 507–544.
[11] S. S. Chern and J. K. Moser, Real hypersurfaces in complex manifolds, *Acta Math.* **133** (1974), 219–271.
[12] C. L. Epstein, R. B. Melrose, and G. A. Mendoza, Resolvent of the Laplacian on strictly pseudoconvex domains, *Acta Math.* **167** (1991), no. 1-2, 1–106.
[13] C. Fefferman, The Bergman kernel and biholomorphic mappings of pseudoconvex domains, *Invent. Math.* **26** (1974), 1–65.
[14] G. B. Folland and J. J. Kohn, *The Neumann problem for the Cauchy-Riemann complex*, Princeton University Press, Princeton, N.J.; University of Tokyo Press, Tokyo, 1972. Annals of Mathematics Studies, No. 75.
[15] A. R. Gover and C. R. Graham, CR invariant powers of the sub-Laplacian, *J. Reine Angew. Math.* **583** (2005), 1–27.
[16] C. R. Graham, Higher asymptotics of the complex Monge-Ampère equation, *Compositio Math.* **64** (1987), no. 2, 133–155.
[17] K. Hirachi, Q-prime curvature on CR manifolds, *Differential Geom. Appl.* **33** (2014), no. suppl., 213–245.
[18] K. Hirachi, T. Marugame, and Y. Matsumoto, Variation of total Q-prime curvature on CR manifolds, preprint. `arXiv:1510.03221`.
[19] P. D. Hislop, P. A. Perry, and S.-H. Tang, CR-invariants and the scattering operator for complex manifolds with boundary, *Anal. PDE* **1** (2008), no. 2, 197–227.
[20] L. Hörmander, L^2 estimates and existence theorems for the $\bar{\partial}$ operator, *Acta Math.* **113** (1965), 89–152.
[21] ———, *An introduction to complex analysis in several variables*, Third, North-Holland Mathematical Library vol. 7, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1990.
[22] D. Jerison and J. M. Lee, The Yamabe problem on CR manifolds, *J. Differential Geom.* **25** (1987), no. 2, 167–197.
[23] J. J. Kohn and H. Rossi, On the extension of holomorphic functions from the boundary of a complex manifold, *Ann. of Math. (2)* **81** (1965), 451–472.
[24] N. Koiso, Einstein metrics and complex structures, *Invent. Math.* **73** (1983), no. 1, 71–106.
[25] J. M. Lee, Fredholm operators and Einstein metrics on conformally compact manifolds, *Mem. Amer. Math. Soc.* **183** (2006), no. 864, vi+83.
[26] T. Marugame, Renormalized Chern-Gauss-Bonnet formula for complete Kähler-Einstein metrics, to appear in *Amer. J. Math.* `arXiv:1309.2766`.
[27] Y. Matsumoto, *Asymptotically complex hyperbolic Einstein metrics and CR geometry*, Ph.D. Thesis, 2013. The University of Tokyo.
[28] ———, Asymptotics of ACH-Einstein metrics, *J. Geom. Anal.* **24** (2014), no. 4, 2135–2185.
[29] ———, GJMS operators, Q-curvature, and obstruction tensor of partially integrable CR manifolds, to appear in *Diff. Geom. Appl.* `arXiv:1402.4110`.
[30] ———, Deformation of Einstein metrics and L^2-cohomology on strictly pseudoconvex domains, in preparation.
[31] T. Ohsawa, Applications of the $\overline{\partial}$ technique in L^2 Hodge theory on complete Kähler manifolds, *Several complex variables and complex geometry, Part 2 (Santa Cruz, CA, 1989)*, Proc. Sympos. Pure Math. vol. 52, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991, pp. 413–425.