漸近的対称 Einstein 計量について

松本佳彦

2016 年 5 月 9 日

漸近的対称計量とは (1)

非コンパクト多様体上に定義される完備 Riemann 計量で，無限遠に近づくにつれ（非コンパクト型 Riemann）対称空間の計量に漸近する もの．

	モデル	境界上の構造
漸近的双曲 (AH)	$\mathbb{R}H^n = \mathrm{SO}_0(n,1)/\mathrm{SO}(n)$	共形
漸近的複素双曲 (ACH)	$\mathbb{C}H^n = \mathrm{SU}(n,1)/\mathrm{S}(\mathrm{U}(n)\times\mathrm{U}(1))$	CR
漸近的四元数双曲 (AQH)	$\mathbb{Q}H^n = \mathrm{Sp}(n,1)/\mathrm{Sp}(n)\times\mathrm{Sp}(1)$	四元数接触
漸近的八元数双曲 (AOH)	$\mathbb{O}H^2 = \cancel{F_4/\mathrm{Spin}(9)}\ F_4^{-20}/\mathrm{Spin}(9)$	八元数接触
（名前なし）	$\mathrm{SL}(3,\mathbb{R})/\mathrm{SO}(3)$	（名前なし）
漸近的積双曲	$\mathbb{K}_1H^{n_1}\times\mathbb{K}_2H^{n_2}$	（名前なし）
⋮	⋮	⋮

漸近的対称計量とは (2)

漸近的対称計量の 2 つの特徴

1. 無限遠に近づくにつれて，モデルとなる対称空間の計量に漸近する
   - 特に，漸近的対称計量は bounded geometry を持つ
     - ★ つまり，一定の半径を持つ開球 $B \subset \mathbb{R}^n$ を値域とするような座標近傍系を，計量の各成分 g_{ij} が（任意階の偏導関数も含め）一様に有界となるように取れる
   - 実際にはもっと精密な座標近傍系を取り，大域解析的な議論に応用できる
2. 無限遠境界に幾何構造を誘導する (**conformal infinity**)

漸近的対称 Einstein 計量の研究

- ACH の特殊なケース：Fefferman (1976)，Cheng–Yau (1980)
- AH：Fefferman–Graham (1985)
- 残りのランク 1 (ACH, AQH, AOH)：Biquard (2000)
- ランク 2 以上：Biquard–Mazzeo (2006)

双曲空間 $\mathbb{R}H^n$ と無限遠境界の共形幾何

$\mathbb{R}H^n$ の Poincaré 球モデル——単位開球 $B^n = B(0,1) \subset \mathbb{R}^n$ とその上の計量

$$g = \frac{4}{(1-r^2)^2}((dx^1)^2 + (dx^2)^2 + \cdots + (dx^n)^2).$$

ただし $r = |x| = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + \cdots + (x^n)^2}$ とおいた．

- $n \geq 3$ のとき，これは $S^{n-1} = \partial B^n$ の標準的な共形類 $[\gamma]$ と深く関係する：

$$\mathrm{Isom}(B^n, g) = \mathrm{Conf}(S^{n-1}, [\gamma]) = \mathrm{O}(n,1)/\{\pm 1\}.$$

- $n \geq 4$ のとき，S^{n-1} の 局所的な 共形微分同相も $\mathrm{O}(n,1)/\{\pm 1\}$ の元に限られる（Liouville の定理）．

漸近的対称 Einstein 計量に関する bulk-boundary 対応

- 「境界上の幾何構造（たとえば共形構造）」の局所的な情報から，領域内部の計量を局所的に一意に構成する手続きがある（のではないか）
- その「手続き」を，大域的な設定で考察することもできる（のではないか）
- 境界の不変量を，この領域上の計量に関する解析的問題を通じて構成できる（のではないか）

そのような「手続き」として，主流となっているのが

漸近的対称 Einstein 計量であって
与えられた境界上の幾何構造を conformal infinity とするものを作る

というもの．言い換えると，われわれは

漸近的対称計量についての Einstein 方程式に関する
漸近的 Dirichlet 問題を考察する．

$\mathbb{R}H^n$ の無限遠境界の共形構造を計量を通じて捉える

$\mathbb{R}H^n$ の双曲計量 g に対する 2 つの見方——

1. 上半空間モデル $\mathbb{R}H^n = \mathbb{R}^{n-1} \times (0, \infty)$ では

$$g = \frac{1}{x^2}\left(dx^2 + (dy^1)^2 + (dy^2)^2 + \cdots + (dy^{n-1})^2\right)$$

$x/2$ を改めて x とおくと

$$g = \frac{1}{x^2}\left(dx^2 + \frac{1}{4}\left((dy^1)^2 + (dy^2)^2 + \cdots + (dy^{n-1})^2\right)\right)$$

2. Poincaré 開球モデルで，$(1-|x|^2)/4$ を改めて x とおくと，$B^n \setminus \{0\} \cong S^{n-1} \times (0, 1/4)$ において

$$g = \frac{1}{x^2}\left(dx^2 + \frac{1}{4}(1+x^2)^2 dS^{n-1}\right) = \frac{1}{x^2}\left(dx^2 + \frac{1}{4}dS^{n-1}\right) + o(1)$$

漸近的双曲 (AH) 計量の定義

X^n を非コンパクト多様体とし，M^{n-1} を閉多様体とする．
あるコンパクト部分集合 K を除いた部分が $M \times (0,1)$ と微分同相であるとする．
$(0,1)$ のほうの座標を x と書く．$x = 0$ を「無限遠」側とする．

定義

γ を M 上の Riemann 計量とし，$[\gamma]$ を γ の共形類とする．
X 上の Riemann 計量 g が $[\gamma]$ を **conformal infinity** とする **AH 計量**であるとは，
$X \setminus K$ 上で g が，$M \times (0,1)$ との同一視を通じて次のように表されることをいう：

$$g = \frac{1}{x^2}\left(dx^2 + \frac{1}{4}\gamma\right) + o(1).$$

漸近的対称計量の定義（ランク１の場合）

以下で $\mathbb{K}$ は $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$, $\mathbb{O}$ のいずれかとする．$k = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{K}$ とおく．

X^{kn} を非コンパクト多様体とし，M^{kn-1} を閉多様体とする．
あるコンパクト部分集合 K を除いた部分が $M \times (0,1)$ と微分同相であるとする．

θ を M 上の $\mathrm{Im}\,\mathbb{K}$ 値 1-form とし，$H = \ker\theta$ とする．ファイバー次元 $k(n-1)$．
H に概複素構造 $J_1, \ldots, J_{k-1}$ があり，これらが $\mathrm{Im}\,\mathbb{K}$ の基底の交換関係関係式を満たし，さらに H に

$$\gamma(\cdot,\cdot) = d\theta_i(\cdot, J_i\cdot) \qquad (i = 1, \ldots, k-1)$$

を満たすファイバー計量 γ が与えられているものとする．

定義

X 上の Riemann 計量 g が $[\gamma]$ を **conformal infinity** とする **A$\mathbb{K}$H 計量**であるとは，
$X \setminus K$ 上で g が，$M \times (0,1)$ との同一視を通じて次のように表されることをいう：

$$g = \left(\frac{dx^2}{x^2} + \frac{1}{4x^4}\theta^2 + \frac{1}{4x^2}\gamma \right) + o(1).$$

漸近的対称計量に対する「よい座標近傍系」

次の主張は AH, ACH の場合には正しい．AQH, AOH でも正しいような気がする．
（ランク ≥ 2 のときの類似の主張の成立はあやしい．）

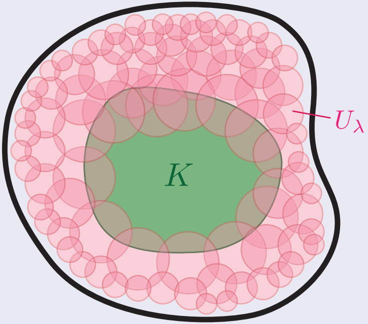
命題（$\mathbb{K}H^n$ の開球をモデルとする座標近傍系の存在）

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$．(X, g) を A$\mathbb{K}$H 空間とする．
そのとき，ある $r > 0$ が存在して，

$\forall \varepsilon > 0$ に対し，$\exists K \subset X$ コンパクト，
$\exists \{ \Phi_\lambda \colon U_\lambda \to B_r$ 微分同相 $\}$ s.t.

- $\{ U_\lambda \}$ が $X \setminus K$ を被覆する．
- $\left\| (\Phi_\lambda^{-1})^* g - g_{\mathbb{K}H^n} \right\|_{C^0(B_r)} < \varepsilon$.

ただし，B_r は $\mathbb{K}H^n$ の半径 r の開球．



なお，「$C^0(B_r)$」の部分は，A$\mathbb{K}$H 計量の定義における $o(1)$ の意味を変更すれば「$C^{k,\alpha}(B_r)$」にできる．

最初の例——Cheng–Yau の完備 Kähler-Einstein 計量

X を $\mathbb{C}^n$ $(n \geq 2)$ の有界強擬凸領域とする
（より一般には，$\mathbb{C}^n$ の代わりに任意の Stein 多様体をとっていい）.

定理（Cheng–Yau 1980）

定数 $\lambda < 0$ を固定する.
そのとき，X 上には $\mathrm{Ric}(g) = \lambda g$ を満たす完備 Kähler 計量がただ一つ存在する.

Cheng–Yau の計量は実際には ACH 計量であって，conformal infinity は ∂X の通常の CR 構造によって与えられる．すなわち，γ を接触形式 θ に対する Levi 形式とすると

$$g = \left(\frac{dx^2}{x^2} + \frac{1}{4x^4}\theta^2 + \frac{1}{4x^2}\gamma \right) + o(1).$$

（γ の共形類 $[\gamma]$ は CR 構造のみによって定まる．逆に $[\gamma]$ から CR 構造もわかる．）

漸近的対称 Einstein 計量の研究の状況

- 有界強擬凸領域の完備 Kähler-Einstein 計量（Cheng–Yau 計量）
  - Fefferman (1976), Graham (1987)：形式的漸近級数として決定
  - Cheng–Yau (1980)：大域的な存在と一意性
  - Lee–Melrose (1982)：漸近展開（対数項を含む）の存在
- AH-Einstein 計量
  - Fefferman–Graham (1985)：形式的漸近級数として決定
  - Graham–Lee (1991)：$\mathbb{R}H^n$ の変形可能性
  - Lee (2006)：$Y([\gamma]) \geq 0$ かつ $K_g \leq c_n$ であるような AHE 計量の変形可能性
  - Chruściel–Delay–Lee–Skinner, Anderson, Biquard, ...
- 一般の ACH-Einstein 計量
  - Biquard (2000)：$\mathbb{C}H^n$ の変形可能性
  - **松本 (2014)：形式的漸近級数として決定**
  - **松本 (未出版)：Cheng–Yau 計量の変形可能性** $(n \geq 3)$
- AQH-Einstein, AOH-Einstein 計量
  - Biquard (2000)：$\mathbb{Q}H^n$ の変形可能性
  - Biquard–Mazzeo (2006)：山口 (1993) に基づき S^{15} の八元数接触構造の変形不可能性を指摘
- ランク ≥ 2 の対称空間をモデルとする場合
  - Biquard–Mazzeo (2006, 2011)：定式化，$\mathbb{K}_1 H^{n_1} \times \mathbb{K}_2 H^{n_2}$ の変形可能性

Partially integrable CR 構造——ACH 計量の conf. infinity

正確には，ACH 計量の conformal infinity は 可積分な CR 構造とは限らない．

Levi 形式 $\gamma = d\theta(\cdot, J\cdot)$ が H の正定値計量となることが求められていた．γ が対称形式となるための条件は

$$d\theta \equiv i \sum h_{\alpha\overline{\beta}} \theta^\alpha \wedge \theta^{\overline{\beta}} \mod \theta$$

であること．言い換えれば

$$[\Gamma(T^{1,0}M), \Gamma(T^{1,0}M)] \subset \Gamma(T^{1,0}M \oplus \overline{T^{1,0}M}).$$

定義

上記の条件を満たす概 CR 構造 J を **partially integrable CR 構造**と呼ぶ．
さらに γ が正定値のとき，partially integrable CR 構造 J は**強擬凸**であるという．

- 強擬凸 partially integrable CR 構造の摂動は，$\mathrm{Sym}^2(T^{1,0}M)^*$ の C^∞ 切断として与えられる．
- 田中 (1962, 1975) や Chern–Moser (19~~75~~74) も，~~実は可積分性ではなくこの条件下で議論を展開している~~（この記述は勇み足だったようです）．

Cheng–Yau 計量の変形可能性定理

定理（松本，未出版）

X を 3 次元以上の Stein 多様体の有界強擬凸領域とする．
境界 ∂X において，J_{std} に十分近い partially integrable CR 構造 J が与えられたとする（$C^{2,\alpha}$ 位相に関して．なお強擬凸性は摂動で保たれる）．
そのとき，J を conformal infinity とする ACH 計量で Einstein なものが存在する．

- 次元の制約は技術的なもの．
- （ステートメントには現れないが，）Cheng–Yau 計量の変形により得られる．
- $X = B^n$（すなわち $\mathbb{C}H^n$）の場合は Biquard (2000) による（そのときは $n = 2$ でもよい）．
- ACH-Einstein 計量には「局所一意性」がある．これは Biquard が一般に証明している．

変形可能性定理の証明の方針

- 基本的な議論の枠組みは Biquard によるもの.
  - Banach 空間における逆関数定理を適用する．そのためには，(gauged) Einstein 作用素 $\mathcal{E}$ の線型化 $\mathcal{E}'$ が同型写像であることが必要.
  - 適切な Banach 空間で $\ker \mathcal{E}' = 0$ を示せばよいのだが，これが実は L^2-kernel $\ker_{L^2} \mathcal{E}'$ の消滅から従うことがわかる.
  - $K_g < 0$ であれば $\ker_{L^2} \mathcal{E}' = 0$ は Weitzenböck 型の議論ですぐにわかる（$\rightsquigarrow$ $\mathbb{C}H^n$ の場合は OK）．しかし一般に Cheng–Yau 計量について $K_g < 0$ かどうかは不明.
- 松本によるアイディア：L^2 コホモロジーと結びつけて議論する.
  - 小磯 (1983) の観察を用いて，$\ker_{L^2} \mathcal{E}' = 0$ を $H^{0,1}_{(2)}(X, T^{1,0})$ の消滅に帰着する.
  - 大沢 (1991 など) の指摘する完全列を用いて，$H^{0,1}_{(2)}(X, T^{1,0})$ の消滅を境界近傍における L^2 評価に帰着する.
  - 境界における計量の（したがって曲率の）漸近的振る舞いがわかっていることに注意しつつ，多変数関数論的な手法を用いて，その L^2 評価を証明する.

形式的漸近級数解の存在，級数の決定

定理（松本 2014）

与えられた M^{2n-1} とその上の強擬凸 partially integrable CR 構造 J に対し，それを conf. infinity とするような次の形の形式的漸近級数としての ACH 計量

$$g=\left(\frac{dx^2}{x^2}+\frac{1}{4x^4}\theta^2+\frac{1}{4x^2}\gamma\right)+\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{k_j}x^j(\log x)^k\varphi_j^{(k)}$$

であって，任意に固定した M の点において形式的に Einstein 方程式を満たすものが存在する．ただし各 $\varphi_j^{(k)}$ は θ/x^2, θ^α/x, $\theta^{\overline{\alpha}}/x$ の対称テンソルである．

そのような漸近級数に任意性は残るが，「ごくわずか」である．特に

$$\varphi_j^{(0)}\quad(j<2n),\qquad\varphi_{2n}^{(1)}$$

は一意的に定まる．ここで現れる $2n$ は線型化 gauged Einstein 作用素の**特性根**と呼ばれる数で，変形可能性の考察でも重要な役割を果たす．

形式的漸近級数解の第一対数項

形式的漸近級数解の「第一対数項」$\varphi_{2n}^{(1)}$ は，強擬凸 partially integrable CR 多様体 M の局所不変量になっている．これを **CR 障害テンソル**と呼ぶことにした．（共形幾何における対応物は **Fefferman–Graham の障害テンソル．**）

CR 障害テンソル $\mathcal{O}$ は，重み付きテンソル束 $\mathrm{Sym}^2(T^{1,0}M)^* \otimes E(-2n+2)$ の切断と自然に解釈される．以下は松本 (2014, 2016) の結果．

- M が可積分 CR 多様体であれば，$\mathcal{O} = 0$ となる．
- $\mathcal{O}$ は CR 全 Q 曲率の第一変分を与える（よって可積分 CR 構造は臨界点）．
- 可積分 CR 構造における $\mathcal{O}$ の第一変分を与える微分作用素は，（CR 幾何的な）Nijenhuis テンソルの第一変分の空間を経由する．
  - 線型化 Einstein 作用素のことを真剣に考え始めた初めの目的は，$\mathcal{O}$ の第一変分を調べることだった．