岩澤多様体の変形　　2019/12/8

(小平『複素多様体と複素構造の変形 II』§28)

● 定義, $H^q(M, \Theta)$ の基底

Def. 岩澤多様体 $M = G/\Gamma$. ただし

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & z_1 & z_3 \\ & 1 & z_2 \\ & & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \Gamma = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_3 \\ & 1 & \alpha_2 \\ & & 1 \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \\ \in \mathbb{Z}[\sqrt{-1}] \end{array} \right\}.$$

$$\boxed{M \text{ 上の} \left\{ \begin{array}{c} \text{vector fields} \\ \text{forms} \end{array} \right\} = G \text{ 上の} \left\{ \begin{array}{c} \text{vector fields} \\ \text{forms} \end{array} \right\} \text{ で 左 } \Gamma \text{ 不変なもの}}$$

(1,0)-vector fields

$$\begin{cases} \theta_1 = \dfrac{\partial}{\partial z_1} + z_2 \dfrac{\partial}{\partial z_3} \\ \theta_2 = \dfrac{\partial}{\partial z_2} \\ \theta_3 = \dfrac{\partial}{\partial z_3} \end{cases}$$

とくに $T^{1,0}$ は自明.
$(\Theta \cong \mathcal{O}^3.)$

(1,0)-forms

$$\begin{cases} \beta_1 = dz_1 \\ \beta_2 = dz_2 \\ \beta_3 = dz_3 - z_2 dz_1 \end{cases}$$

外微分 $d\beta_1 = d\beta_2 = 0$
$d\beta_3 = \beta_1 \wedge \beta_2$

β_3 は hol だが non-closed
$\therefore$ M は non-Kähler.

Prop. Hermite 計量 $\omega = \sqrt{-1} \sum_{\lambda=1}^{3} \beta_\lambda \wedge \bar{\beta}_\lambda$ に関し $\mathcal{H}^{0,1}(M) = \langle \bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2 \rangle$.
よってまた $H^1(M, \Theta)$ は 6 次元, $\theta_i \bar{\beta}_\lambda \begin{pmatrix} i = 1, 2, 3 \\ \lambda = 1, 2 \end{pmatrix}$ で張られる.
$H^2(M, \Theta)$ は 6 次元 $\left(\because H^2(M, \mathcal{O}) \underset{\text{Serre}}{\cong} H^1(M, K)^* \cong H^1(M, \mathcal{O})^*\right)$

変形の構成

パラメタ　$t = (t_{i\lambda})_{\substack{i=1,2,3 \\ \lambda=1,2}}$

$$\varphi(t) = \varphi_1(t) + \varphi_2(t) + \cdots \quad \in \Gamma(M,\ T^{1,0} \otimes \Lambda^{0,1})$$

$$\varphi_1(t) = \sum_{\substack{i=1,2,3 \\ \lambda=1,2}} t_{i\lambda}\, \theta_i\, \bar{\beta}_\lambda$$

可積分条件　$\bar{\partial}\varphi(t) - \frac{1}{2}[\varphi(t), \varphi(t)] = 0$　------ ①

<u>Prop.</u>　$\varphi_2(t) = -\begin{vmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{vmatrix} \theta_3 \bar{\beta}_3$

とおけば　$\varphi(t) = \varphi_1(t) + \varphi_2(t)$ は（すでに）① の真の解.

M_t の正則座標は

$$\bar{\partial}\zeta_\alpha - \varphi(t)\cdot\zeta_\alpha = 0 \qquad (\alpha = 1,2,3)$$

(1,0)-v.f. 部分が
ζ_α に作用

$$\zeta_\alpha = z_\alpha + \underset{(t\text{について}1\text{次})}{\zeta_{\alpha,1}(t)} + \underset{(2\text{次})}{\zeta_{\alpha,2}(t)} + \cdots$$

を解いて得られる. 実際の展開はやはり 2次までで停止する.

Prop. 複素多様体として $M_t = \mathbb{C}^3/\Gamma_t$.

ただし Γ_t は抽象群としては Γ で，$\mathbb{C}^3$ への作用は

$$\begin{array}{ccc}
\Gamma_t = \Gamma & \longrightarrow & \mathrm{Aff}(\mathbb{C}^3) \\
\rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\
\gamma & \longmapsto & \gamma_t : (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) \mapsto (\zeta_1', \zeta_2', \zeta_3'), \\
\| & & \\
\begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_3 \\ & 1 & \alpha_2 \\ & & 1 \end{pmatrix} & &
\end{array}$$

$$\begin{cases}
\zeta_1' = \zeta_1 + \alpha_1 + \beta_1(t), \\
\zeta_2' = \zeta_2 + \alpha_2 + \beta_2(t), \\
\zeta_3' = \zeta_3 + \alpha_3 + \alpha_2\zeta_1 + \beta_1(t)\zeta_2 \\
\qquad + \beta_3(t) + A(\bar{\alpha}) - \begin{vmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{vmatrix} \bar{\alpha}_3 + \beta_1(t)\alpha_2.
\end{cases}$$

ここで
$$\beta_j(t) = t_{j1}\bar{\alpha}_1 + t_{j2}\bar{\alpha}_2,$$
$$A(\bar{\alpha}) = \frac{1}{2}\left(t_{11}t_{21}\bar{\alpha}_1^2 + t_{12}t_{22}\bar{\alpha}_2^2 + 2t_{11}t_{22}\bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_2\right).$$

Cor. $d\zeta_1 \wedge d\zeta_2 \wedge d\zeta_3$ は Γ_t の作用で不変．

よって K_{M_t} は自明．

[Proof] $d\zeta_1' = d\zeta_1$, $d\zeta_2' = d\zeta_2$ で，また

$$d\zeta_3' \equiv d\zeta_3 \mod d\zeta_1, d\zeta_2.$$

□

◎ 変形 M_t の性質

Prop. $\dim H^0(M_t, \Theta_t) = 3 - \operatorname{rank}\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix}$.

とくに M_t は平行化可能でない.

[Proof] $\mathbb{C}^3$ において

$$\eta_1 = \frac{\partial}{\partial \zeta_1} + \zeta_2 \frac{\partial}{\partial \zeta_3}, \quad \eta_2 = \frac{\partial}{\partial \zeta_2}, \quad \eta_3 = \frac{\partial}{\partial \zeta_3}$$

とおいて, $\sum_{j=1}^{3} f_j(\zeta)\eta_j$ が Γ_t 不変となる条件を調べる.

そうして

$$H^0(M_t, \Theta_t) \cong \left\{ c_1\eta_1 + c_2\eta_2 + c_3\eta_3 \;\middle|\; c_j \in \mathbb{C},\ (c_2 \ \ -c_1)\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

を得る. □

『II』では次に $\dim H^1(M_t, \Theta_t) \leq 6 - \operatorname{rank}\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix}$ の証明に移るが議論がおかしい. $h_t^q = \dim H^q(M_t, \Theta_t)$ とおくと

$$h_0^0 - h_0^1 + h_0^2 - h_0^3 = h_t^0 - h_t^1 + h_t^2 - h_t^3$$

(たとえば Hirzebruch-R-R による).

これと $h_t^3 \leq h_0^3$ から $h_t^0 - h_t^1 + h_t^2 \geq h_0^0 - h_0^1 + h_0^2$ が出るというがこれは出ない. $\geq$ の向きが逆.

わかるのは $h_t^1 - h_0^1 \leq -\operatorname{rank}\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix} + \underbrace{3}_{h_0^3} - h_t^3$ だが…….

わかるのは $h_t^2 \leqq h_0^2$ より

$$h_t^0 - h_t^1 - h_t^3 \geqq h_0^0 - h_0^1 - h_0^3 .$$

すなわち

$$-\left(3 - \mathrm{rank}\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix}\right) + h_t^1 + h_t^3 \leqq -3 + 6 + 3 \quad \cdots ②$$

$$\left(\Theta \cong \mathcal{O}^3 \text{ で } H^3(M, \mathcal{O}) \cong H^0(M, K) \cong \underset{1\text{次元}}{H^0(M, \mathcal{O})} \right)$$

さらに $H^3(M_t, T_t^{1,0}) \cong H^0(M_t, K_t \otimes \Lambda_t^{1,0}) \cong H^0(M_t, \Lambda_t^{1,0})$.

Lem. $\dim H^0(M_t, \Lambda_t^{1,0}) = 2$ if $t \neq 0$.

[Proof] $\mathbb{C}^3$ において η_1, η_2, η_3 の双対基底を ψ_1, ψ_2, ψ_3 とおいて $\sum_{j=1}^{3} f_j(\zeta)\psi_j$ が Γ_t 不変となる条件を調べ，$t \neq 0$ のときは

$$H^0(M_t, \Lambda_t^{1,0}) \cong \{ c_1\psi_1 + c_2\psi_2 \mid c_1, c_2 \in \mathbb{C} \}$$

を得る. □

Prop. $\mathrm{rank}\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix} = 2 \Longrightarrow h_t^1 \leqq 5$.

[Proof] ② と Lem. から，$t \neq 0$ のとき

$$h_t^1 \leqq 7 - \mathrm{rank}\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix}.$$

□

なお次もわかる（『II』にある）.

<u>Prop.</u> $\mathrm{rank}\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix} = 2$ のとき, M_t は t_{31}, t_{32} に依存しない.

[Proof] 具体的に双正則写像を構成する.

$M_t = \mathbb{C}^3/\Gamma_t$ だった.

$$\begin{array}{ccc} (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) & \xrightarrow{\ \gamma_t\ } & (\zeta_1', \zeta_2', \zeta_3') \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\hat{\zeta}_1, \hat{\zeta}_2, \hat{\zeta}_3) & \xrightarrow{\ \hat{\gamma}_t\ } & (\hat{\zeta}_1', \hat{\zeta}_2', \hat{\zeta}_3') \end{array}$$

座標 ζ を $\hat{\zeta}$ に取りかえて, $\mathbb{C}^3$ を Γ の t_{31}, t_{32} にはよらない作用で割っているものと理解し直す.

$$\begin{cases} \hat{\zeta}_1 = \zeta_1 + \omega_1 \\ \hat{\zeta}_2 = \zeta_2 + \omega_2 \\ \hat{\zeta}_3 = \zeta_3 + \omega_1 \zeta_2 \end{cases} \qquad (\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C})$$

という形の取りかえを考える. γ_t に対応する $\hat{\gamma}_t$ は次で与えられる.

$$\begin{aligned} \hat{\zeta}_1' &= \hat{\zeta}_1 + \alpha_1 + \beta_1(t) \\ \hat{\zeta}_2' &= \hat{\zeta}_2 + \alpha_2 + \beta_2(t) \\ \hat{\zeta}_3' &= \hat{\zeta}_3 + \alpha_3 + \alpha_2 \hat{\zeta}_1 + \beta_1(t) \hat{\zeta}_2 \\ &\quad + \beta_3(t) + A(\bar{\alpha}) - \begin{vmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{vmatrix} \bar{\alpha}_3 + \beta_1(t)\alpha_2 \\ &\quad - \beta_1(t)\omega_2 + \beta_2(t)\omega_1. \end{aligned}$$

$= \sum_{\lambda=1}^{2} \bar{\alpha}_\lambda \left(\underline{\underline{t_{3\lambda} - \omega_2 t_{1\lambda} + \omega_1 t_{2\lambda}}} \right)$. $\mathrm{rank}\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix} = 2$ なら ω_1, ω_2 をうまく決めて $\underline{\underline{\qquad}}$ を0にできる. □

▨ $\dim H^0(M_t, \Lambda_t^{1,0}) = 2$ $(t \neq 0)$ の証明の詳細.

γ_t の作用 $(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) \longmapsto (\zeta_1', \zeta_2', \zeta_3')$ で η_j が η_j' にうつる.

η_j の双対枠を ψ_j, η_j' の双対枠を ψ_j' とする. 両者の関係は

$$\begin{cases} \psi_1' = \psi_1, \\ \psi_2' = \psi_2, \\ \psi_3' = \psi_3 - \beta_2(t)\psi_1 + \beta_1(t)\psi_2. \end{cases}$$

$\sum_{j=1}^{3} f_j(\zeta)\psi_j$ が Γ_t の作用で不変であるための条件は

$$\begin{cases} f_1(\zeta') - \beta_2(t) f_3(\zeta') = f_1(\zeta), \\ f_2(\zeta') + \beta_1(t) f_3(\zeta') = f_2(\zeta), \\ \qquad\qquad\qquad f_3(\zeta') = f_3(\zeta) \end{cases}$$

が $\forall \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ に対し成り立つこと. まず $f_3 = \text{const.}$ ($= c_3$ とおく) がわかる. よって

$$\begin{cases} f_1(\zeta') - \beta_2(t) c_3 = f_1(\zeta), \\ f_2(\zeta') + \beta_1(t) c_3 = f_2(\zeta). \end{cases} \quad \cdots \text{③}$$

$\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ のときは $\beta_1(t)$ も $\beta_2(t)$ も 0 だから, f_1, f_2 は

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha_3 \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{pmatrix}$ の作用では不変. この作用は $\begin{cases} \zeta_1 \longmapsto \zeta_1' = \zeta_1 \\ \zeta_2 \longmapsto \zeta_2' = \zeta_2 \\ \zeta_3 \longmapsto \zeta_3' = \zeta_3 + \alpha_3 - D\overline{\alpha_3} \end{cases}$

$\left(D = \begin{vmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{vmatrix}\right)$ だから, f_1, f_2 は ζ_3 について二重周期関数,

ゆえに ζ_3 について定数. さらに ③ より $\dfrac{\partial f_1}{\partial \zeta_1}, \dfrac{\partial f_1}{\partial \zeta_2}, \dfrac{\partial f_2}{\partial \zeta_1}, \dfrac{\partial f_2}{\partial \zeta_2}$

は Γ_t で不変だから定数. したがって

$$f_1(\zeta) = a_{11}\zeta_1 + a_{12}\zeta_2 + c_1,$$
$$f_2(\zeta) = a_{21}\zeta_1 + a_{22}\zeta_2 + c_2$$

を得る. よって

$$f_1(\zeta)\psi_1 + f_2(\zeta)\psi_2 + c_3\psi_3$$
$$= (a_{11}\zeta_1 + a_{12}\zeta_2 + c_1)\psi_1 + (a_{21}\zeta_1 + a_{22}\zeta_2 + c_2)\psi_2 + c_3\psi_3,$$

$$f_1(\zeta')\psi_1' + f_2(\zeta')\psi_2' + c_3\psi_3'$$
$$= \left(a_{11}(\zeta_1+\alpha_1+\beta_1(t)) + a_{12}(\zeta_2+\alpha_2+\beta_2(t)) + c_1\right)\psi_1$$
$$+ \left(a_{21}(\zeta_1+\alpha_1+\beta_1(t)) + a_{22}(\zeta_2+\alpha_2+\beta_2(t)) + c_2\right)\psi_2$$
$$+ c_3\left(\psi_3 - \beta_2(t)\psi_1 + \beta_1(t)\psi_2\right).$$

これらが等しくなければならないから

$$\begin{cases} a_{11}(\alpha_1+\beta_1(t)) + a_{12}(\alpha_2+\beta_2(t)) - c_3\beta_2(t) = 0, & ④ \\ a_{21}(\alpha_1+\beta_1(t)) + a_{22}(\alpha_2+\beta_2(t)) + c_3\beta_1(t) = 0 & ⑤ \end{cases}$$

がみたされなければならない.

④ に
$(\alpha_1, \alpha_2) = (1, 0)$ を代入して
$$a_{11}(1+t_{11}) + a_{12}(0+t_{21}) - c_3 t_{21} = 0$$
$(\alpha_1, \alpha_2) = (\sqrt{-1}, 0)$ を代入して
$$a_{11}(\sqrt{-1} - \sqrt{-1}\,t_{11}) + a_{12}(0 - \sqrt{-1}\,t_{21}) - c_3\cdot(-\sqrt{-1}\,t_{21}) = 0$$
よって $a_{11} = 0$. 同様に $a_{12} = 0$. ⑤ で同じことをして $a_{21} = a_{22} = 0$.
ゆえに $f_1(\zeta)$, $f_2(\zeta)$ も定数 c_1, c_2 であるとわかった.

再び ④, ⑤ から

$$H^0(M_t, \Lambda_t^{1,0}) \cong \{ c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + c_3\varphi_3 \mid c_j \in \mathbb{C},\ c_3\beta_1 = c_3\beta_2 = 0 \}$$

がわかる. 条件 $c_3\beta_1 = c_3\beta_2 = 0$ とは

$$\begin{cases} c_3(t_{11}\bar{\alpha}_1 + t_{12}\bar{\alpha}_2) = 0, \\ c_3(t_{21}\bar{\alpha}_1 + t_{22}\bar{\alpha}_2) = 0 \end{cases}$$

ということで, これが任意の α_1, α_2 について成立する条件は

$$c_3 t_{11} = c_3 t_{12} = c_3 t_{21} = c_3 t_{22} = 0.$$

$t \neq 0$ ならこれは $c_3 = 0$ を意味し, 最終的に

$$H^0(M_t, \Lambda_t^{1,0}) \cong \{ c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 \mid c_j \in \mathbb{C} \}$$

を得る.