

集合と写像の基本事項

3.1 集合

「ものの集まり」のことを集合というのであった。現代の数学は、集合の概念を基礎にして組み立てられている。(より厳密には、集合の概念を公理的に記述すべきだけれども、ここではナイーブな理解にとどめておく。)

既知の集合から次のような新しい集合を作る操作がある。基本的性質とともにおさえておこう。

- 和集合, 共通部分
- 差集合
- 補集合
- 直積集合
- 冪集合

また、特別な記号で表される集合として、次の集合を知っておくこと。

- 数の集合
 - N (自然数全体の集合)
 - Z (整数全体の集合)
 - Q (有理数全体の集合)
 - R (実数全体の集合)
 - C (複素数全体の集合)

なお、この授業では特に断らない限り、0 は N の元ではない (自然数ではない) と約束する。

- 区間

$$\begin{array}{ll}
 [a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} & (a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} \\
 [a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} & (a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\} \\
 [a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\} & (a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\} \\
 (-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\} & (-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\} \\
 (-\infty, \infty) = \mathbb{R} &
 \end{array}$$

3.2 写像

2つの集合 A, B が与えられているとき、 A の各元に対し B の元を対応させる規則のことを、 A から B への写像という。これについて次の概念を知っておこう。

- 定義域と終域, 値域
- 写像のグラフ
- 全射, 単射, 全単射

授業に関する補足

- 成績判定にあたり、授業中の演習問題に関する発表の状況を加点の材料として使う場合があります。
- 次回から、冒頭の 15 分を使って小テストを行います。演習問題を復習しておいてください (* 付きのものは範囲外)。

演習問題

- 3.1 (1) 集合 A を $A = \{3m + 2n \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$ と定義する. $A = \mathbb{Z}$ であることを証明せよ.
(2) 集合 A を $A = \left\{ \frac{1}{x+1} \mid x \in \mathbb{R}, x > 0 \right\}$ と定義する. $A = (0, 1)$ であることを証明せよ.

3.2 A, B, C を集合とする. 次の等式を証明せよ.

- (1) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$.
(2) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$.

3.3 写像 $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$f(x) = \frac{2x}{x-1}$$

によって定義する. この f は単射であるか否か, また全射であるか否か判定せよ.

3.4 (1) 写像 $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ を

$$f(m, n) = 2^{m-1}(2n-1)$$

によって定義する. これが全単射であることを証明せよ.

(注: $f((m, n))$ というのが正式な書き方だが, 普通はそれを $f(m, n)$ と略記する.)

- (2) 全射であるが単射でない写像 $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ の例を一つ挙げよ. また, 単射であるが全射でない写像 $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ の例を一つ挙げよ.

3.5* (問題 1.2 の言い換え)

集合や写像に関する言葉を用いて, 自然数を次のように定義することができる. (ここでは, 0 は自然数であるという立場をとっている.)

定義 X を集合とする. X はある特定の元 0 を持ち, また写像 $S: X \rightarrow X$ が与えられているとする. これらが次の性質を満たすとき, X を **自然数の集合** と呼び, X の各々の元を **自然数** と呼ぶ.

- (i) 0 は S の値域には属さない.
(ii) S は単射である.
(iii) X の任意の部分集合 A について, もし $0 \in A$, かつ「 $x \in A$ のとき $S(x) \in A$ 」であるならば, $A = X$ が成り立つ.

(注: 本来は集合 X だけが大切なのではなくて, 特別な元 0 や写像 S も重要な役割を果たすのだから, 組 $(X, 0, S)$ のことを「自然数の体系」とでも呼ぶほうが適切であろう.)

これについて, 次の定理を証明せよ.

定理 X を自然数の集合とする. そのとき, 任意の自然数 $x \in X$ に対し, 次の性質 (i) _{x} , (ii) _{x} を満たすような写像 $f_x: X \rightarrow X$ が一意に存在する.

- (i) _{x} $f_x(0) = x$.
(ii) _{x} 任意の自然数 $y \in X$ に対し $f_x(S(y)) = S(f_x(y))$.

(注: これは自然数の和を定義するための定理である. 上の f_x を用いて, $x + y = f_x(y)$ と定める.)
[一意性の証明のヒント: $x \in X$ とし, 写像 f_x, g_x がいずれも性質 (i) _{x} , (ii) _{x} を満たすと仮定する. $A = \{y \in X \mid f_x(y) = g_x(y)\}$ とおき, $A = X$ であることを証明せよ.]