

数学の楽しみ 1D [第 6 回の補足]

授業で次の補題について説明した際、一意性の証明をしなかった。それを補足する。

補題 3 任意の実数 a に対し、

$$n \leq a < n + 1$$

を満たす整数 n がただ一つ存在する。

(一意性の証明) そのような n が 2 つあったとして、それらを $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ とする。すなわち

$$n_1 \leq a < n_1 + 1, \quad n_2 \leq a < n_2 + 1. \quad (*)$$

そのとき $n_1 = n_2$ であることを示したい。仮に $n_1 \neq n_2$ だとすると、 $n_1 < n_2$ か $n_1 > n_2$ である。 $n_1 < n_2$ として一般性を失わない。すると、 n_1 と $n_1 + 1$ の間に整数が存在しないことから $n_1 + 1 \leq n_2$ となるが、これと (*) を組み合わせると

$$a < n_1 + 1 \leq n_2 \leq a$$

となって矛盾である。ゆえに $n_1 = n_2$ 。