授業の中で扱わなかった定理 5.2.1 の証明について説明する．

この定理は, 基底の取り替えに伴う表現行列の変化に関するものだった．U, V をベクトル空間, $T\colon U \to V$ を線形写像とする．また,

$E = \{\, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n \,\}$ と $E' = \{\, \boldsymbol{u}'_1, \boldsymbol{u}'_2, \ldots, \boldsymbol{u}'_n \,\}$ を U の基底,
$F = \{\, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m \,\}$ と $F' = \{\, \boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2, \ldots, \boldsymbol{v}'_m \,\}$ を V の基底

として，E から E' への基底の変換行列を P，F から F' への基底の変換行列を Q とする．すなわち，第 3 回（10 月 20 日，教科書 4.2 節）で導入した一次結合の記法を用いて

$$(\boldsymbol{u}'_1, \boldsymbol{u}'_2, \ldots, \boldsymbol{u}'_n) = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n)P, \qquad (\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2, \ldots, \boldsymbol{v}'_m) = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m)Q \tag{1}$$

であるとする．

定理 5.2.1　上の状況で，線形写像 $T\colon U \to V$ の基底 E, F に関する表現行列を A とし，基底 E', F' に関する表現行列を B とすると

$$B = Q^{-1}AP$$

が成り立つ．

また授業でも口頭で述べたように，定理 5.2.1 の特別な場合として，線形変換に対する定理が得られる．すなわち線形変換 $T\colon V \to V$ に対して，$E = \{\, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n \,\}$ と $E' = \{\, \boldsymbol{u}'_1, \boldsymbol{u}'_2, \ldots, \boldsymbol{u}'_n \,\}$ を V の基底とし, E から E' への基底の変換行列を P とするとき，次が成り立つ．こちらも納得しておいてください．

定理 5.2.2　上の状況で，線形変換 $T\colon V \to V$ の基底 E に関する表現行列を A とし，基底 E' に関する表現行列を B とすると

$$B = P^{-1}AP$$

が成り立つ．

では証明しよう．

［定理 5.2.1 の証明］初めに表現行列の定義を確認する．

$$T(\boldsymbol{u}_j) = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m)\boldsymbol{a}_j, \qquad T(\boldsymbol{u}'_j) = (\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2, \ldots, \boldsymbol{v}'_m)\boldsymbol{b}_j \qquad (j = 1,\, 2,\, \ldots,\, n) \tag{2}$$

とするとき，$A = [\boldsymbol{a}_1 \quad \boldsymbol{a}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{a}_n]$, $B = [\boldsymbol{b}_1 \quad \boldsymbol{b}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{b}_n]$ であった．式 (2) はまとめて

$$\begin{aligned}(T(\boldsymbol{u}_1), T(\boldsymbol{u}_2), \ldots, T(\boldsymbol{u}_n)) &= (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m)A,\\ (T(\boldsymbol{u}'_1), T(\boldsymbol{u}'_2), \ldots, T(\boldsymbol{u}'_n)) &= (\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2, \ldots, \boldsymbol{v}'_m)B\end{aligned}$$

と書き表すことができる．

次に，F から F' ではなく逆の取り替えを表す行列，すなわち F' から F への基底の変換行列を求めておく．この行列を Q' とすると $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m) = (\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2, \ldots, \boldsymbol{v}'_m)Q'$ だから，(1) の第 2 式と合わせることで

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m) &= (\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2, \ldots, \boldsymbol{v}'_m)Q'\\ &= (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m)QQ'\end{aligned}$$

が得られる．ところが，F から F 自身への基底の変換行列は単位行列 E だから，QQ' は E に等しい．したがって F' から F への基底の変換行列 Q' は，Q の逆行列 Q^{-1} に他ならない．（これで同時に，基底の変換行列が一般に正則行列であることもわかった．）

このことを用いて，線形写像 T の基底 E', F' に関する表現行列を次のように計算できる．最初の等号だけは非自明なので後から説明する．

$$\begin{aligned}(T(\boldsymbol{u}'_1), T(\boldsymbol{u}'_2), \ldots, T(\boldsymbol{u}'_n)) &= (T(\boldsymbol{u}_1), T(\boldsymbol{u}_2), \ldots, T(\boldsymbol{u}_n))P \\ &= (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m)AP \\ &= (\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2, \ldots, \boldsymbol{v}'_m)Q^{-1}AP.\end{aligned} \tag{3}$$

したがって T の基底 E', F' に関する表現行列 B は $Q^{-1}AP$ に等しい．

さて，(3) の最初の等号の成立についてだが，これは次のようにしてわかる．基底の変換行列 P が (1) の第 1 式で与えられることを思い出そう．この式は，$P = [\boldsymbol{p}_1 \quad \boldsymbol{p}_2 \quad \ldots \quad \boldsymbol{p}_n]$ とおけば

$$\boldsymbol{u}'_j = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n)\boldsymbol{p}_j$$

であることを意味する．さらに $P = [p_{ij}]$ とすれば

$$\boldsymbol{u}'_j = p_{1j}\boldsymbol{u}_1 + p_{2j}\boldsymbol{u}_2 + \cdots + p_{nj}\boldsymbol{u}_n$$

である．ここで T が線形写像であることを用いると

$$T(\boldsymbol{u}'_j) = p_{1j}T(\boldsymbol{u}_1) + p_{2j}T(\boldsymbol{u}_2) + \cdots + p_{nj}T(\boldsymbol{u}_n)$$

すなわち

$$T(\boldsymbol{u}'_j) = (T(\boldsymbol{u}_1), T(\boldsymbol{u}_2), \ldots, T(\boldsymbol{u}_n))\boldsymbol{p}_j$$

が得られる．これを書き換えたものが (3) の最初に現れる等式である． □

なお，10 月 20 日の授業で「定理 4.2.4, 4.2.5 は 5.2 節で使うのでその際に説明する」と言いました．使っているのはまさにこの証明においてです．$QQ' = E$ や $B = Q^{-1}AP$ を結論するために，厳密に言えば定理 4.2.5（ないし問題 4.2.6）が使われます．

でも，この点については気にしないでけっこうです．定理 4.2.4, 4.2.5 の説明も省略することにします．よくわからないが気になるという人は質問に来てください．