2016年度 線形代数学B（木曜1限，担当：松本佳彦）中間試験

2016年12月8日（木）1限　試験時間60分

配布物：問題，解答用紙1枚（1枚まで追加可），計算用紙1枚（追加可）

以下の問題に答えよ．解答の順番は問わない．

記号 $\mathbb{R}[x]_n$ は，実数を係数とする n 次以下の x の多項式全体のなすベクトル空間を表すものとする．

1.　n を0以上の任意の整数とする．

(1)　次式で定義される写像 $T\colon \mathbb{R}[x]_n \to \mathbb{R}[x]_{n+1}$ は線形写像である．そのことを証明せよ．

$$T(f(x)) = f'(x) + 2xf(x).$$

(2)　次式で定義される写像 $S\colon \mathbb{R}[x]_n \to \mathbb{R}[x]_{2n}$ は線形写像ではない．そのことを証明せよ．

$$S(f(x)) = f(x)^2.$$

2.　数ベクトル空間 $\mathbb{R}^4$ において，次の3個のベクトル $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ を考える．

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{u}_3 = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(1)　$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ は一次独立である．そのことを証明せよ．

(2)　$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ を含む $\mathbb{R}^4$ の基底を一組求めよ．

3.　次で定義される線形写像 $T_A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ を考える．

$$T_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}, \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

(1)　T_A の階数，すなわち T_A の像 $\mathrm{Im}(T_A)$ の次元を求めよ．

(2)　次に示す $\mathbb{R}^3$ の基底 E と $\mathbb{R}^2$ の基底 F に対し，T_A の基底 E, F に関する表現行列を求めよ．

$$E = \left\{ \boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{u}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}, \quad F = \left\{ \boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}.$$

4.　n を0以上の任意の整数とする．実数 α に対し，次式で定義される線形変換 $T_\alpha\colon \mathbb{R}[x]_n \to \mathbb{R}[x]_n$ を考える．

$$T_\alpha(f(x)) = f'(x) + \alpha f(x).$$

(1)　T_0 の像 $\mathrm{Im}(T_0)$ について，$\mathrm{Im}(T_0) \neq \mathbb{R}[x]_n$ であることを証明せよ．

(2)　$\alpha \neq 0$ のとき，T_α の像 $\mathrm{Im}(T_\alpha)$ が $\mathbb{R}[x]_n$ に一致することを証明せよ．

答案の返却について　数学資料室（全学教育推進機構実験棟II 364号室）にて，12月12日（月）から12月22日（木）まで．学生証持参のこと．開室時間は次のとおり：月 10:00–15:45，火 8:30–17:15，水 11:30–18:15，木 8:30–17:15，金 14:15–17:15．