

極值的長さによるタイヒミュラー空間の幾何

宮地 秀樹

CONTENTS

1. 導入	2
1.1. 動機	2
1.2. 比較	2
1.3. 距離空間としてのタイヒミュラー空間	4
1.4. 謝辞	4
2. タイヒミュラー空間と測度付き葉層構造の空間	4
2.1. タイヒミュラー空間	4
2.2. タイヒミュラー測地線	5
2.3. 測度付き葉層構造	5
3. 正則二次微分の幾何	6
3.1. 有理型二次微分	6
3.2. 自然座標	7
3.3. 軌道	7
3.4. Jenkins-Strebel 微分	7
3.5. 垂直葉層構造	8
4. 極值的長さ	9
4.1. 極值的長さ	9
4.2. 測度付き葉層構造の極值的長さ	9
4.3. 擬等角歪曲性と Kerckhoff の公式	11
5. タイヒミュラーの定理およびその読み替え	13
5.1. タイヒミュラーの定理	13
5.2. 指数写像	13
6. タイヒミュラー空間のコンパクト化	14
6.1. Gardiner-Masur コンパクト化	14
6.2. Thurston コンパクト化	14
7. Gardiner-Masur コンパクト化	15
7.1. Gardiner と Masur の結果	15
7.2. Kerckhoff の結果	16
8. 極值的長さの幾何	17
8.1. 拡張定理	17
8.2. タイヒミュラー測地線の極限	17
8.3. 指数写像の極限点の連続性	18
8.4. ホロ関数閉包と GM 閉包	19
8.5. タイヒミュラー空間内の概測地線の到達不可能性	20
8.6. 交点数関数と Gromov 積の拡張	20

Date: 第54回関数論シンポジウム (平成23年10月8日~10月10日, 千葉大学).
本研究は科学研究費 (基盤研究 (C) 21540177) の助成を受けたものである. .

9. 双曲的長さ ² と極值的長さから定まる幾何の比較	21
9.1. Masur と Lenzhen の結果	21
9.2. Walsh の結果	22
References	22

1. 導入

この小論は、極值的長さ²への漸近挙動によるコンパクト化である Gardiner-Masur コンパクト化に関する筆者（講演者）の最近の結果（[24], [25], [26], [27], [28], [29]）についてまとめたものである。講演ではそれらについて解説する。なお、この小論では特に証明などを与えていないので、必要であれば論文を参照されたい。

1.1. **動機.** タイヒミュラー空間には擬等角変形空間として自然な距離であるタイヒミュラー距離が定義される（cf. §2.1）。タイヒミュラー距離はいくつかの場面で現れる重要な距離である。例えば、

(複素解析) タイヒミュラー空間は自然な複素構造がもち、タイヒミュラー距離は小林距離と一致する（Royden）。タイヒミュラー距離の完備性から、タイヒミュラー空間はスタイン多様体となる。

(クライン群) クライン群の正則運動を擬等角関数論を基とした解析する際の基本的な距離関数である（上記 Royden の結果による）。

(トポロジー) 擬アノソフ写像の作用のタイヒミュラー距離に関する移動距離（translation length）は、写像の位相的エントロピーと一致する。

(力学系) 区間入れ替え変換（Interval Exchange Transformation）の研究において重要なタイヒミュラー測地流（Teichmüller geodesic flow）の基礎となる幾何を与える。

などが知られている。

Kerckhoff の公式（命題 4.4）によれば、タイヒミュラー距離は単純閉曲線の極值的長さの比により表現される。つまり、タイヒミュラー距離は極值的長さの比較から定まるリーマン面の標識付きモジュライの間の差を与えると考えられる。上に記したように、Gardiner-Masur コンパクト化および Gardiner-Masur 境界は、単純閉曲線の極值的長さによる曲面（モジュライ）の退化状況をまとめて定義されるタイヒミュラー空間のコンパクト化および境界である（cf. §6.1）。

これらの状況から、次のような素朴な問題が提起される。

問題 1. タイヒミュラー距離に関する自然なタイヒミュラー空間のコンパクト化（閉包）は *Gardiner-Masur* コンパクト化であろう。

「なにをもって自然とするか」も含めて、この問題（疑問）を基礎としてタイヒミュラー距離による幾何と Gardiner-Masur 閉包の幾何の関連について調べる。

1.2. **比較.** リーマン面上には双曲計量という重要な幾何構造がある。上記の見方を踏襲して、Thurston による定義および Walsh の最近の結果（定理 9.3）から考えると、双曲計量に関する退化を集めたコンパクト化は Thurston コンパクト化である、と考えることが出来る。双曲計量から定まる測地線の長さ²と極值的長さはリーマン面論およびタイヒミュラー空間論において基本的な幾何学的不変量であるから、Thurston コンパクト化と Gardiner-Masur コンパクト化を比較することは自然である。

以上のことから、比較表 1 及び比較表 2 を得る。比較表 1 は、タイヒミュラー距離から定まる基本的な幾何学的対象であるタイヒミュラー測地線の、Thurston コンパクト化と Gardiner-Masur コンパクト化における振る舞いに関して比較したもので

ある。比較表 2 では、双曲計量と極值的長さの退化における幾何の比較を与える。両コンパクト化はホロ関数閉包を用いることにより統一的に扱うことが出来るため、表においてはその下での比較を与えた。なお、比較表の中の言葉はここでは定義を与えていないが、その定義は後の節で与えるため参考にされたい。また比較表内の、「？」の部分は、筆者が対応する主張を見たことが無いという意味である。もし対応する主張をご存知の方がおられればご教授いただければ幸いである。

	Thurston コンパクト化	Gardiner-Masur コンパクト化
極限の存在	存在する場合 (Masur, 定理 9.1) もあるが, 存在しない場合 (Lenzhen, 定理 9.2) もある.	必ず存在する (M., 定理 8.2 もしくは Liu-Su, 命題 8.4)
概測地線の極限の存在	?	必ず存在する (Liu-Su, 命題 8.4 もしくは M. [28] の §3.3)
極限の単射性	異なる測地線が同じ極限を持つことがある (Masur, 定理 9.1)	異なる測地線は異なる極限を持つ (M., 定理 8.2)
極限の方向依存性	?	ほとんどすべての点において双連続である。しかし、全射でもなく一般に連続ではない (M., 定理 8.4 および定理 8.3)。
到達不可能性	?	到達不可能な境界点が存在する (M., 命題 8.2 および定理 8.6)

TABLE 1. タイヒミュラー測地線の振る舞いに関する比較

	双曲的長さ	極值的長さ
対応する距離	Thurston のリップシッツ距離 (Thurston, 式 (9.1))	タイヒミュラー距離 (Kerckhoff, 命題 4.4)
ホロ関数閉包	Thurston コンパクト化 (Walsh, 定理 9.3)	Gardiner-Masur コンパクト化 (Liu-Su, 定理 8.5)
閉包の位相	ξ_0 -次元閉球と同相 (Thurston, 定理 6.2)	?
境界点	交点数関数 (\mathcal{MF} 上の連続関数) の射影類 (Thurston, Rees, 定理 2.1, Thurston, 定理 6.2)	\mathcal{MF} 上の連続関数 \mathcal{E}_p の射影類 (M., 定理 8.1)
Busemann 点	すべての境界点は Busemann 点である (Walsh, 定理 9.3)	Busemann 点でない境界点が存在する (M., 定理 8.6)
Gromov 積	?	閉包全体に連続拡張する (M., 定理 8.9)

TABLE 2. ホロ関数閉包による比較

注目すべきは、Gardiner-Masur 閉包内において、タイヒミュラー測地線の極限の存在、極限の単射性及びほとんどすべての点における連続性、そして三角形を考える際の基本的な量である Gromov 積の拡張性が成立することである。つまり、Gardiner-Masur 閉包は、タイヒミュラー空間のタイヒミュラー距離に関する自然な閉包であると積極的に考えるための「状況証拠」がいくつかある、ということである。なお、

タイヒミュラー空間上のリプシッツ代数と Gardiner-Masur 閉包の関係は [27] において与えられている。リプシッツ関数は距離空間上の基本的な関数であるので、この関連性からも、タイヒミュラー距離と Gardiner-Masur 閉包の「ある意味の」自然な関連が示唆されている。

また、Gromov 積の拡張性 (定理 8.9) と及び、Gromov 積と境界にある測度付き特異葉層構造の交点数との関連を応用することにより、C.Earle, I.Kra, N.Ivanov, V.Markovic, H. Royden によるタイヒミュラー空間の等長群の特徴づけに関する別アプローチ (別証明) を得ることも注意しておく (cf. [29]).

1.3. 距離空間としてのタイヒミュラー空間. 距離空間の性質としては次のことが知られている。

定理 1.1 (Masur-Wolf [21], McCarthy-Papadopoulos [23]). タイヒミュラー空間はタイヒミュラー距離の下で *Gromov* の意味で双曲的ではない。

また一方で、次のことも知られている。

定理 1.2 (Balogh-Bonk [3]). $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ ($n \geq 2$) を C^2 級の境界を持つ有界強擬凸領域とする。 d_Ω を Ω 上の小林距離とする。このとき距離空間 (Ω, d_Ω) は *Gromov* の意味で双曲的である。

これらよりタイヒミュラー空間が C^2 級の境界を持つ有界強擬凸領域とは双正則同値にならないことがわかる。また次の事実も知られている。

定理 1.3 (Masur [19], M. [28]). タイヒミュラー空間はタイヒミュラー距離の下で CAT(0) 空間ではない。

このことから、タイヒミュラー空間の距離空間の性質を調べる事のみならず、一般に、どのような擬凸領域が CAT(0) 空間であるか、ひいては小林距離に関してどのような幾何を持つかを調べる事は、幾何学的並びに複素解析的な意味で興味ある問題であると思われる。

1.4. 謝辞. 函数論シンポジウムでの講演の機会を与えてくださった組織委員の方々に御礼申し上げます。ありがとうございます。

2. タイヒミュラー空間と測度付き葉層構造の空間

以下 X を (g, n) 型の解析的有限リーマン面とする。以下 $\xi_0 = \xi(X) := 6g - 6 + 2n$ とする。 ξ_0 は X のタイヒミュラー空間 $T(X)$ の実次元であり、 X 上のパンツ分解は $\xi_0/2$ 本の互いに交わらない単純閉曲線からなる。

2.1. タイヒミュラー空間. リーマン面 Y と擬等角写像 $f: X \rightarrow Y$ の対 (Y, f) を **標識付きリーマン面** と呼ぶ。擬等角写像 f を **標識** と呼ぶ。2つの標識付きリーマン面 $(Y_1, f_1), (Y_2, f_2)$ は、 $h \circ f_1$ が f_2 がホモトピックになるような等角写像 $h: Y_1 \rightarrow Y_2$ が存在するとき同値であるという。標識付きリーマン面の同値類全体を X の **タイヒミュラー空間** と呼び、 $T(X)$ と書く。

タイヒミュラー空間 $T(X)$ には **タイヒミュラー距離** と呼ばれる次のように定義される距離がある。

$$(2.1) \quad d_T(y_1, y_2) = \frac{1}{2} \log \inf \{ K(h) \mid h: Y_1 \rightarrow Y_2 \text{ は } f_2 \circ f_1^{-1} \text{ とホモトピックな q.c.} \}$$

但し、 $K(h)$ は h の最大歪曲度 (maximal dilatation) である。タイヒミュラー距離は完備である。

2.2. **タイヒミュラー測地線.** $y = (Y, f) \in T(X)$ と Y 上の正則二次微分 $q = q(z)dz^2$ (cf. §3.1) に対してベルトラミ微分

$$\mu_q := \frac{|q|}{q} = k \frac{|q(z)| dz}{q(z)}$$

を考える. このとき $t \geq 0$ に対してベルトラミ方程式

$$\bar{\partial}f = \tanh(t)\mu_q \cdot \partial f$$

の根を $f_{t,q}$ を考える. $f_{t,q}$ は Y 上の e^t -擬等角写像である.

$$y_t = (f_{t,q}(Y), f_{t,q} \circ f)$$

とするとき,

$$(2.2) \quad d_T(y, y_t) = t$$

が成立する. つまり $f_{t,q}$ はそのホモトピー類の中で最小の最大歪曲度を与える擬等角写像である. 特に,

$$(2.3) \quad R_{q,y}: [0, \infty) \ni t \mapsto R_{q,y}(t) = y_t \in T(X)$$

は y を始点とするタイヒミュラー距離に関する測地線となる. 逆に任意の2点を結ぶ測地線はこのように表すことが出来る. さらに, 任意の2点を結ぶ測地線が一意的に存在する¹.

2.3. **測度付き葉層構造.** X 上の非自明かつ境界にホモトピックでない単純閉曲線のホモトピー類の全体を \mathcal{S} と記す. \mathcal{S} の各元は X 上のある閉曲線にホモトピックな単純閉曲線のなす集合と考えることも出来ることに注意する. ただし, 以下に与えられる結果は基本的に曲線のホモトピー類によらないので, \mathcal{S} の各元を X 上の曲線そのもののように扱うこともある.

\mathcal{S} の2つの元 α, β に対して α, β の **(幾何学的) 交点数** を

$$i(\alpha, \beta) = \min\{\#\alpha' \cap \beta' \mid \alpha' \in \alpha, \beta' \in \beta\}$$

により定義する. 対称性 $i(\alpha, \beta) = i(\beta, \alpha)$ が成立することは定義より明らかである. $\mathbb{R}_+ = \{t \geq 0\}$ とする. \mathbb{R}_+ と \mathcal{S} の形式的積の全体を $\mathbb{R}_+ \otimes \mathcal{S}$ と記す. つまり,

$$\mathbb{R}_+ \otimes \mathcal{S} = \{t\alpha \mid t \geq 0, \alpha \in \mathcal{S}\}$$

である. $1 \cdot \alpha \in \mathbb{R}_+ \otimes \mathcal{S}$ を $\alpha \in \mathcal{S}$ と同一視し, $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}_+ \otimes \mathcal{S}$ と考える.

このとき, 写像

$$(2.4) \quad i_*: \mathbb{R}_+ \otimes \mathcal{S} \ni t\alpha \mapsto [\mathcal{S} \ni \beta \mapsto ti(\alpha, \beta)] \in \mathbb{R}_+^{\mathcal{S}}$$

は単射であることが知られている. ここで $\mathbb{R}_+^{\mathcal{S}}$ は \mathcal{S} 上の非負値関数の全体であり, 各点収束の位相を入れて位相空間と考える. 写像 (2.4) の像の閉包を \mathcal{MF} と書き, **測度付き葉層構造の空間** と呼ぶ. 埋め込み (2.4) によって,

$$i_*(\alpha)(\beta) = i(\alpha, \beta)$$

となる. 故に, $F \in \mathcal{MF}$ に対して

$$F(\alpha) = i(F, \alpha)$$

と記し, $i(F, \alpha)$ を F と α の **(幾何学的) 交点数** と呼ぶ. さらに, $s\beta \in \mathbb{R}_+ \otimes \mathcal{S}$ と $F \in \mathcal{MF}$ に対して

$$i(F, s\beta) = si(F, \beta)$$

¹ここでは Y は解析的有限を仮定していることに注意する. 一般にはこれらのことは成り立たない.

と定義する. 特に

$$(2.5) \quad i(t\alpha, s\beta) = ts i(\alpha, \beta) = sti(\beta, \alpha) = i(s\beta, t\alpha)$$

が $t\alpha, s\beta \in \mathbb{R}_+ \otimes \mathcal{S}$ に対して成立する. 次の事実が知られている.

定理 2.1 (Thurston, Rees). 交点数関数

$$i(\cdot, \cdot) : \mathcal{MF} \times (\mathbb{R}_+ \otimes \mathcal{S}) \ni (F, t\alpha) \mapsto i(F, t\alpha) = ti(F, \alpha)$$

は $\mathcal{MF} \times \mathcal{MF}$ 上の連続関数に拡張される.

また, \mathcal{MF} には正の数の全体 $\mathbb{R}_{>0}$ が

$$(2.6) \quad \mathcal{MF} \times \mathbb{R}_{>0} \ni (F, t) \mapsto tF \in \mathcal{MF}$$

により作用する. 式 (2.5) と $\mathbb{R}_+ \otimes \mathcal{S}$ が \mathcal{MF} 内で稠密であるので, 総線形性

$$i(tF, sG) = ts i(F, G)$$

及び対称性

$$i(F, G) = i(G, F)$$

が成立する.

作用 (2.6) による $\mathcal{MF} - \{0\}$ の商空間を \mathcal{PMF} と書き, **射影的葉層構造の空間** と呼ぶ. つまり

$$\mathcal{PMF} = (\mathcal{MF} - \{0\}) / \mathbb{R}_{>0}$$

である. 定義から $\mathbb{R}_+ \otimes \mathcal{S} - \{0\} \subset \mathcal{MF} - \{0\}$ の商写像による像は \mathcal{S} と自然に同一視されるため, \mathcal{S} は \mathcal{PMF} の部分集合であると考えることができる. 定義より \mathcal{S} は \mathcal{PMF} 内の稠密な部分集合である. \mathcal{MF} と \mathcal{PMF} はそれぞれ \mathbb{R}^{ξ_0} と S^{ξ_0-1} と同相であることが知られている (cf. [6]).

3. 正則二次微分の幾何

この章では有理型二次微分及びその幾何について復習する. 詳細は例えば Strebel の本 [32] を見よ.

3.1. 有理型二次微分. リーマン面 Y 上の正則座標系 $\{(U_\lambda, z_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ をとる. 各 $\lambda \in \Lambda$ に対して U_λ 上の有理型関数 q_λ を考える. $q = \{q_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が次の変換法則を満たすとき, Y 上の**有理型二次部分**であるという. さらに各 q_λ が U_λ 上の正則関数のとき, q を**正則二次微分と呼ぶ**.

$U_{\lambda_1} \cap U_{\lambda_2} \neq \emptyset$ のとき, 任意の $z \in z_{\lambda_1}(U_{\lambda_1} \cap U_{\lambda_2})$ に対して,

$$q_{\lambda_2}(z_{\lambda_2\lambda_1}(z)) \left(\frac{dz_{\lambda_2\lambda_1}}{dz}(z) \right)^2 = q_{\lambda_1}(z)$$

が成立する. 但し, $z_{\lambda_2\lambda_1} = z_{\lambda_2} \circ z_{\lambda_1}^{-1}$ とする. 上記は形式的には

$$q_{\lambda_2} \cdot dz_{\lambda_2}^2 = q_{\lambda_1} \cdot dz_{\lambda_1}^2$$

が成立すると考えることが出来るため, $q(z)dz^2$ が不変量であると考えることが出来る. このとき $q = q(z)dz^2$ を記す. 定義より $p \in Y$ と $p \in U_\lambda$ を満たす λ について p が q_λ の m -位零点もしくは極であれば, $p \in U_\lambda$ を満たすすべての λ に対して, p は q_λ の m -位零点もしくは極となる. このような点を q の**特異点**と呼ぶ. さらに零点の場合には q の**零点**, 極の場合には q の**極**と呼ぶ.

定義より $q = \{q_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が有理型二次微分のとき, $\{|q_\lambda|\}_{\lambda \in \Lambda}$ は変換法則

$$|q_{\lambda_2}(z_{\lambda_2\lambda_1}(z))| \left| \frac{dz_{\lambda_2\lambda_1}}{dz}(z) \right|^2 = |q_{\lambda_1}(z)|$$

を満たすので、(一般に q の特異点では特異性を持つ) 面積要素もしくは計量と考えることが出来る。このような計量を q から誘導される特異平坦構造もしくは q -計量と呼び $|q|$ と書く。

q の L^1 -ノルムを

$$\|q\| = \int_Y |q| = \int_Y |q(z)| dx dy$$

により定義する。 Y 上の正則二次微分 q の L^1 -ノルムが有限の場合、 q は Y の尖点 (puncture) において高々 1 位の極をもつ有理型二次位分に拡張される。

3.2. 自然座標. q をリーマン面 Y 上の有理型二次微分とする。 $p_0 \in Y$ を q の特異点でない点とする。 p_0 の周りのチャート (U, z) を U は単連結かつ q の特異点を含まないようにとる。このとき $\sqrt{q} = \sqrt{q(z)} dz$ は U 上で一価な分枝を持つことに注意する。ここで U 上の正則関数

$$\zeta(p) = \int_{p_0}^p \sqrt{q(z)} dz$$

を考える。 U は q の特異点を含まないので、 ζ は U 上局所単葉である。従って U を適当に小さくすれば ζ は U 上の単葉関数である。つまり対 (U, ζ) は正則チャートとなる。このように構成されたチャート (U, ζ) を q の**自然座標**と呼ぶ。定義により

$$d\zeta^2 = q(z) dz^2 = q$$

となるので、 q -計量はこの座標においてユークリッド計量 $|d\zeta|^2$ となる。

3.3. 軌道. $\gamma: (a, b) \rightarrow Y$ が

$$\arg(q(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)^2) = 2\theta$$

を満たすとき、 Y 上の正則二次微分 q に関する θ -線分とよぶ。 (U, ζ) を $U \cap \gamma((a, b)) \neq \emptyset$ を満たす q の自然座標すると、

$$\arg((\zeta \circ \gamma)') = \arg(\sqrt{q(\gamma(t))} \cdot \gamma'(t)) \equiv \theta \pmod{\pi}$$

が成立するので、 θ -線分は自然座標において θ -方向の線分となる。この逆も成立する。極大な θ -線分を q の θ -軌道と呼ぶ。また閉曲線となる θ -軌道を θ -閉軌道と呼ぶ。 θ を特に気にしないときにはただ単に軌道もしくは閉軌道という。特に、 $\theta = 0$ のとき**水平軌道**、 $\theta = \pi/2$ のとき**垂直軌道**という。軌道は横断的な自己交差を持たない。実際、横断的な自己交差をもつ点の周りでは、軌道に沿って角度が一定にはなり得ないからである。

閉じていない軌道 $\gamma: (a, b) \rightarrow Y$ が、 $\lim_{t \rightarrow b} \gamma(t)$ が存在し、かつ q の特異点であるとき**特異軌道**とよぶ。また両方向に極限 $\lim_{t \rightarrow a} \gamma(t)$ 、 $\lim_{t \rightarrow b} \gamma(t)$ が存在しかつそれらの極限が q の特異点であるとき、**サドルコネクション (saddle connection)** と呼ぶ。

3.4. Jenkins-Strebel 微分. 次の極値問題を考える。

問題 2. Y 上の非自明かつ境界にホモトピックでない単純閉曲線 α に対して、上界

$$\text{Mod}(\alpha) := \sup_A \{ \text{Mod}(A) \mid A \subset Y, A \text{ の中心は } \alpha \text{ とホモトピック} \}$$

を与える円環 A およびそれに関連する解析的・幾何学的対象を考えよ。

ただし, $\text{Mod}(A)$ は A の**モジュラス**と呼ばれる, 次のように定義される等角不変量である. つまり, A が円環 $\{1 < |z| < R\}$ と等角同値のとき

$$\text{Mod}(A) = \frac{1}{2\pi} \log R$$

とする. $\text{Mod}(\alpha)$ を α の**モジュラス**と呼ぶ. 上記の問題については, 次のような解答が知られている.

定理 3.1 (Jenkins, Strebel). Y を双曲型リーマン面とする. 任意の非自明かつ尖点とホモトピックでない Y 上の単純閉曲線 α に対して, 次を満たすような, Y 内のその核曲線が α とホモトピックな円環領域 A および Y 上の L^1 -ノルム有限な正則二次微分 $J_{Y,\alpha}$ が一意的に存在する.

- (1) A' をその核曲線が α とホモトピックな Y 内の円環領域とする. このとき, $\text{Mod}(A') \leq \text{Mod}(A)$ が成立する. 従って,

$$\text{Mod}(\alpha) = \text{Mod}(A)$$

が成立する.

- (2) $Y \setminus A$ は $J_{Y,\alpha}$ の垂直サドルコネクションを辺とし, 特異点を頂点を持つグラフである.
- (3) 等角写像 $z: \{1 < |z| < e^{2\pi m}\} \rightarrow A$ が存在して,

$$z^*(J_{Y,\alpha}) = \frac{1}{4\pi^2 m^2} \frac{dz^2}{z^2}$$

が成立する.

特に, A の境界成分を結ぶ水平軌道の $J_{\alpha,Y}$ -計量による長さは 1 であることに注意する. 定理 3.1 内の $J_{\alpha,Y}$ を Y 上の α に関する **Jenkins-Strebel 微分** と呼ぶ. また, 定理内の円環領域 A を $J_{\alpha,Y}$ の**特性円環**と呼ぶ.

$y = (Y, f) \in T(X)$ に対して,

$$J_{\alpha,y} = J_{f(\alpha),Y}$$

と定義する.

3.5. 垂直葉層構造. リーマン面 Y 上の可積分な正則二次微分全体を \mathcal{Q}_Y と記す. また, $y = (Y, f) \in T(X)$ に対して $\mathcal{Q}_y = \mathcal{Q}_Y$ とする. $q \in \mathcal{Q}_y$ に対して $V_q \in \mathbb{R}_+^S$ を

$$V_q(\beta) = \inf_{\beta' \in f(\beta)} \int_{\beta'} |\text{Re}\sqrt{q}| = \inf_{\beta' \in f(\beta)} \int_{\beta'} \left| \text{Re}(\sqrt{q(z)} dz) \right|$$

($\beta \in \mathcal{S}$) により定義する. $V_q(\beta)$ を β の q -**高さ (height)** と呼ぶ. 例えば, 任意の $\alpha \in \mathcal{S}$ と $y \in T(X)$ に対して,

$$V_{J_{\alpha,y}}(\beta) = i(\alpha, \beta)$$

がすべての $\beta \in \mathcal{S}$ について成立する. したがって, $V_{J_{\alpha,y}} \in \mathcal{MF}$ となる. 一般に任意の $q \in \mathcal{Q}_y$ に対して $V_q \in \mathcal{MF}$ になることが知られている. V_q を q の**垂直葉層構造 (vertical foliation)** と呼ぶ. このとき,

$$V_q(\alpha) = i(V_q, \alpha)$$

と書くこととする. また $H_q = V_{-q}$ として H_q を q の**水平葉層構造 (horizontal foliation)** と呼ぶ. 定義より

$$i(H_q, \beta) = \inf_{\beta' \in f(\beta)} \int_{\beta'} |\text{Im}\sqrt{q}| = \inf_{\beta' \in f(\beta)} \int_{\beta'} \left| \text{Im}(\sqrt{q(z)} dz) \right|$$

が成立する. 上記の逆については, 次の定理がある.

定理 3.2 (Hubbard-Masur [11]). 任意の $F \in \mathcal{MF}$ と $y \in T(X)$ に対して $V_{J_{F,y}} = F$ つまり,

$$i(V_{J_{F,y}}, \alpha) = i(F, \alpha)$$

が任意の $\alpha \in \mathcal{S}$ について成立するような $J_{F,y} \in \mathcal{Q}_y$ が一意的に存在する. さらに対応,

$$\mathcal{MF} \ni F \mapsto J_{F,y} \in \mathcal{Q}_y$$

は同相写像である.

定義から

$$i(V_{J_{t\alpha,y}}, \beta) = ti(\alpha, \beta) = ti(V_{J_{\alpha,y}}, \beta)$$

が任意の $\beta \in \mathcal{S}$ に対して成立する. 従って, 定理 3.2 の一意性から

$$(3.1) \quad J_{t\alpha,y} = t^2 J_{\alpha,y}$$

が任意の $t\alpha \in \mathbb{R}_+ \otimes \mathcal{S}$ に対して成立することがわかる.

4. 極值的長さ

4.1. 極值的長さ. Ω を領域 (一般にリーマン面) として Γ を Ω 内の求長可能 (rectifiable) な曲線のなす族とする. また $\rho = \rho|dz|$ を Ω 上の等角計量とする. このとき Γ の ρ -長さ $L(\Gamma, \rho)$ および Ω の ρ -面積 $A(\Omega, \rho)$ を

$$L(\Gamma, \rho) = \inf_{\gamma \in \Gamma} \int_{\gamma} \rho |dz|$$

$$A(\Omega, \rho) = \int_{\Omega} \rho^2 dx dy$$

により定義する.

Ω 内の Γ の極值的長さを

$$(4.1) \quad \text{Ext}_{\Omega}(\Gamma) = \sup_{\rho} \frac{L(\Gamma, \rho)^2}{A(\Omega, \rho)}$$

と定義する. 但し, 定義内の上限は ρ は $0 < A(\Omega, \rho) < \infty$ を満たす等角計量をすべて考えるものとする.

α を Y 上の単純閉曲線のホモトピー類とすると

$$\text{Ext}_Y(\alpha)$$

によって, α の元とホモトピックな求長可能な曲線のなす族の極值的長さとする. さらに, $y = (Y, f) \in T(X)$ および $\alpha \in \mathcal{S}$ に対して

$$\text{Ext}_y(\alpha) = \text{Ext}_Y(f(\alpha))$$

とする.

4.2. 測度付き葉層構造の極值的長さ. Ω 上の等角計量 $\rho_0 = \rho_0|dz|$ が (4.1) の上限を与えるとき, つまり

$$\text{Ext}_{\Omega}(\Gamma) = \frac{L(\Gamma, \rho_0)^2}{A(\Omega, \rho_0)}$$

が成立するとき ρ_0 は Γ の極値計量 (extremal metric) と呼ばれる. 極値計量を判定する十分条件として次が知られている (Theorem 4-4 in [2]).

定理 4.1 (Beurling). Γ を曲線族とする. ρ_0 が次の 2 条件を満たすとき, ρ_0 は Γ の極値計量となる.

(1) 部分曲線族 $\Gamma_0 \subset \Gamma$ が存在して,

$$\int_{\gamma} \rho_0 |dz| = L(\Gamma, \rho_0)$$

が任意の $\gamma \in \Gamma_0$ に対して成立する

(2) Ω 上の (非負値とは限らない) 等角計量² $h = h|dz|$ が (1) の曲線族 Γ_0 内の任意の曲線 γ に対して

$$\int_{\gamma} h|dz| \geq 0$$

を満たすとする. このとき

$$\int_{\Omega} h \rho_0 dx dy \geq 0$$

が成立する.

この定理 4.1 を用いて, 次を確認する.

命題 4.1. $\alpha \in \mathcal{S}$ 及び $y \in T(X)$ に対して,

$$(4.2) \quad \text{Ext}_y(\alpha) = \int_Y |J_{\alpha, y}(w)| dudv$$

が成立する. ただし $w = u + iv$ である.

Proof. A を $J_{\alpha, y}$ の特性円環として, $z : \{1 < |z| < e^{2\pi m}\} \rightarrow A$ を等角写像とする. $J_{\alpha, y}$ は Y の尖点で高々 1 位の極を持つ有理型二次微分に拡張されるので, その特異点は有限個である. 故に垂直なサドルコネクションは有限本しか無い. 従って, 定理 3.1 の (2) により $Y \setminus A$ は測度 0 であることに注意する.

ここで曲線族 Γ_0 を

$$\Gamma_0 = \{z(\{|z| = r\}) \mid 1 < r < e^{2\pi m}\}$$

と定義する. そして $\rho_0 = |J_{\alpha, y}|^{1/2}$ とする. 計算により, Γ_0 の元は ρ_0 に関する測地線であること, つまり

$$L(\Gamma, \rho_0) = \int_{\gamma} \rho_0 |dz|$$

が $\gamma \in \Gamma_0$ に対して成立することがわかる. いま, 円環領域 $\{1 < |z| < e^{2\pi m}\}$ の普遍被覆写像 $w \mapsto e^{2\pi w}$ を z に合成することにより A を長方形

$$A' = \{w = u + iv \mid 0 < u < m, 0 < v < 1\}$$

の上辺と下辺を同一視したもの, および Γ_0 を長方形 A' 内の垂直線分と考える. いま, 定理 3.1 の (3) により, この座標系では

$$J_{\alpha, y} = m^{-2} dw^2$$

となる. 特に, $\rho_0 = m^{-1}|dw|$ となり ρ_0 はユークリッド計量の定数倍である. いま, (非負値とは限らない) 等角計量 $h = h|dz|$ の任意の $\gamma \in \Gamma_0$ に沿った積分が非負であるとする. これは, 上記の座標において

$$\int_0^1 h(u + iv) dv \geq 0$$

²Ahlfors の本 [2] では Ω を平面領域としているので h を実関数としているが, リーマン面上においては, その証明から h は (非負値とは限らない) 計量として考える必要がある.

が任意の $0 < u < m$ に対して成立することと同値である。このとき

$$0 \leq \int_0^m \int_0^1 h(u+iv) dudv = m \int_{A'} h\rho_0 dudv = m \int_Y h\rho_0 dudv$$

となる。故に $\rho_0 = |J_{\alpha,y}|^{1/2}$ は極値計量である。つまり、

$$\text{Ext}_y(\alpha) = \frac{L(\Gamma, \rho_0)^2}{A(Y, \rho_0)}$$

が成立する。故に、定理 3.1 の (3) の座標系を用いると、

$$A(Y, \rho_0) = \int_Y |J_{\alpha,y}(z)| dudv = \int_{\{1 < |z| < e^{2\pi m}\}} \frac{1}{4\pi m^2} \frac{dudv}{|z|^2} = 1/m$$

が成立する。また、簡単な計算から $L(\Gamma, \rho_0) = 1/m$ であることがわかる。故に、

$$\text{Ext}_y(\alpha) = \frac{L(\Gamma, \rho_0)^2}{A(Y, \rho_0)} = \frac{(1/m)^2}{(1/m)} = \frac{1}{m} = \int_Y |J_{\alpha,y}(w)| dudv$$

を得る。 □

$t\alpha \in \mathbb{R}_+ \otimes \mathcal{S}$ に対して、

$$(4.3) \quad \text{Ext}_y(t\alpha) = t^2 \text{Ext}_y(\alpha)$$

と定義する。このとき式 (3.1) により命題 4.1 と同様の式

$$(4.4) \quad \text{Ext}_y(t\alpha) = \int_Y |J_{t\alpha,y}(z)| dxdy$$

が成立する。S. Kerckhoff により (4.3) により極值的長さは連続関数

$$\text{Ext}_y: \mathcal{MF} \rightarrow \mathbb{R}$$

に拡張されること、そして式 (4.4) は \mathcal{MF} の元に対して成立すること、つまり次のことが示された (cf. [13]) .

命題 4.2 (Kerckhoff). 任意の $F \in \mathcal{MF}$ 及び $y \in T(X)$ に対して

$$\text{Ext}_y(F) = \int_Y |J_{F,y}(z)| dxdy$$

が成立する。

4.3. 擬等角歪曲性と Kerckhoff の公式. 極值的長さは次の意味で等角不変量である (例えば [1] を見よ) .

命題 4.3 (擬等角歪曲性). $f: Y_1 \rightarrow Y_2$ を K 擬等角写像とする。このとき Y_1 上の単純閉曲線 α に対して

$$\text{Ext}_{Y_2}(f(\alpha)) \leq K \text{Ext}_{Y_1}(\alpha)$$

が成立する。

故に、任意の $y_1, y_2 \in T(X)$ に対して

$$(4.5) \quad \frac{1}{2} \log \sup_{\alpha \in \mathcal{S}} \frac{\text{Ext}_{y_1}(\alpha)}{\text{Ext}_{y_2}(\alpha)} \leq d_T(y_1, y_2)$$

が成立する。

命題 4.4 (Kerckhoff の公式 [13]). 任意の $y_1, y_2 \in T(X)$ に対して,

$$d_T(y_1, y_2) = \frac{1}{2} \log \sup_{\alpha \in \mathcal{S}} \frac{\text{Ext}_{y_1}(\alpha)}{\text{Ext}_{y_2}(\alpha)}$$

が成立する.

実際, Kerckhoff の公式は式 (4.5) の逆を示すことになるが, これに関しては次が成立することからわかる.

命題 4.5. $y = (Y, f) \in T(X)$ をとる. 任意の $q \in \mathcal{Q}_y$ と $t \geq 0$ に対して Y 上の擬等角写像 $f_{t,q}$ を §2.2 のようにとる. $y_t = (Y_t, f_t) = (f_{t,q}(Y), f_{t,q} \circ f)$ とする. このとき

$$\begin{aligned} \text{Ext}_{y_t}(V_q) &= e^{-2t} \text{Ext}_y(V_q) \\ \text{Ext}_{y_t}(H_q) &= e^{2t} \text{Ext}_y(H_q) \end{aligned}$$

が成立する.

ここで, 命題 4.5 について $q = J_{\alpha,y}$ の垂直葉層構造の場合について確認する. ここで $V_{J_{\alpha,y}} = \alpha$ であることに注意する.

定理 4.1 のように $J_{\alpha,y}$ の特性円環に水平線分の切り込みを入れて, 座標 w および長方形

$$A' = \{u + iv \mid 0 < u < m, 0 < v < 1\}$$

を構成する. この座標系においては $J_{\alpha,y} = m^{-2} dw^2$ と表示されるので, $t \geq 0$ に対するベルトラミ方程式の根 $f_{t,J_{\alpha,y}}$ は伸縮変形

$$(4.6) \quad A' \ni w \mapsto \cosh(t)w + \sinh(t)\bar{w} = e^t u + i e^{-t} v \in A'_t$$

による表示をもつ. ただし, A'_t は像領域となる長方形である.

いま, $f_{t,J_{\alpha,y}}$ は $J_{\alpha,y}$ の水平および垂直軌道を終微分のそれらにうつすことに注意する (cf. [12]). y_t 上で A'_t は $f_{t,J_{\alpha,y}}$ によって誘導される「張り合わせ」により A'_t から y_t 上の α に関する Jenkins-Strebel 微分 J_{α,y_t} の特性円環が構成される. いま, A'_t の水平方向の幅は e^t であるので, Jenkins-Strebel 微分の一意性より終微分は $J_{e^t \alpha, y_t}$ と一致する. このとき定理 4.1 から, 伸縮変形 (4.6) が面積を保存する写像であることに注意すると,

$$\begin{aligned} \text{Ext}_{y_t}(\alpha) &= \int_{Y_t} |J_{\alpha,y_t}| = e^{-2t} \int_{Y_t} |J_{e^t \alpha, y_t}| \\ &= e^{-2t} \cdot (A'_t \text{ の面積}) \\ &= e^{-2t} \cdot (A' \text{ の面積}) \\ &= e^{-2t} \text{Ext}_y(\alpha) \end{aligned}$$

を得る.

証明から終微分は $J_{e^t \alpha, y_t}$ となるので, その垂直葉層構造は

$$V_{J_{e^t \alpha, y_t}} = e^t \alpha = e^t V_{J_{\alpha,y}}$$

であることに注意する. 同様に, q が一般の場合 $q_t \in \mathcal{Q}_{y_t}$ を極値擬等角写像 $f_{t,q}$ の終微分とすると,

$$(4.7) \quad H_{q_t} = e^{-t} H_q, \quad V_{q_t} = e^t V_q$$

が成立する.

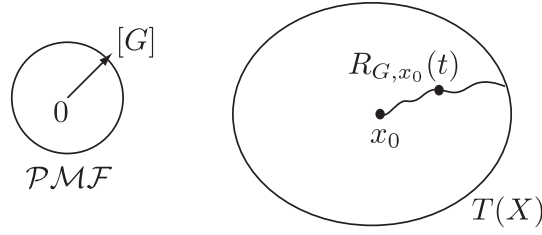


FIGURE 1. タイヒミュラー空間の“指数写像”

5. タイヒミュラーの定理およびその読み替え

タイヒミュラーの定理は様々知られているが、ここではタイヒミュラー空間がユークリッド空間と同相であるという、タイヒミュラーの定理を復習する。

5.1. タイヒミュラーの定理. ここで

$$\mathcal{SQ}_y = \{q \in \mathcal{Q}_y \mid \|q\| = 1\}$$

とする。このとき

$$\mathcal{SQ}_y \times [0, \infty) / (\mathcal{SQ}_y \times \{0\}) \ni (q, t) \mapsto tq \in \mathcal{Q}_y$$

なる同一視を考える。ここで、基点 $x_0 = (X, id) \in T(X)$ を固定する。また $q \in \mathcal{Q}_{x_0}$ に対して

$$R_{q,x_0}: [0, \infty) \rightarrow T(X)$$

を x_0 を始点とする q により定義されるタイヒミュラー測地線とする ((2.3) を見よ)。

定理 5.1 (タイヒミュラー). 写像

$$\mathcal{Q}_{x_0} \ni (q, t) \mapsto R_{q,x_0}(t) \in T(X)$$

は同相写像である。

5.2. 指数写像. いま、 $t \geq 0$ に対して

$$\frac{|tq|}{tq} = \frac{|q|}{q}$$

であることに注意すると、ベルトラミ微分 $|q|/q$ は q の射影類 (定数倍) により決まる。故に、タイヒミュラー測地線

$$(5.1) \quad R_{G,y} = R_{J_{G,y},y}: [0, \infty) \rightarrow T(X)$$

は射影類 $[G] \in \mathcal{PMF}$ により定まる。

Hubbard-Masur の定理 (定理 3.2) により対応 $\mathcal{MF} \ni G \mapsto J_{G,y} \in \mathcal{Q}_y$ が同相写像であることに注意すると、定理 5.1 は次のように読み替えることが出来る (cf. 図 1)。特に、タイヒミュラーの定理による同相写像が位相的に意味を持った“指数写像”として考えることが出来る。

定理 5.2. 写像

$$\mathcal{PMF} \times [0, \infty) / \mathcal{PMF} \times \{0\} \ni ([G], t) \mapsto R_{G,x_0}(t) \in T(X)$$

は同相写像である。

6. タイヒミュラー空間のコンパクト化

現在では、様々なタイヒミュラー空間のコンパクト化が知られている。ここでは、[9] により F. Gardiner と H. Masur により導入された、極値的長さに関するタイヒミュラー空間のコンパクト化を復習する。このコンパクト化のアイデアは Thurston コンパクト化のアナロジーである。実際、この観点では Thurston コンパクト化は双曲的長さに関するコンパクト化となる。

6.1. Gardiner-Masur コンパクト化. ここで

$$\mathbb{P}\mathbb{R}_+^S = (\mathbb{R}_+^S - \{0\})/\mathbb{R}_{>0}$$

とする。ただし、 $\mathbb{R}_{>0}$ は \mathbb{R}_+^S にはかけ算により作用するものとする。このとき写像

$$\Phi_{GM}: \exists T(X) \ni y \mapsto [\mathcal{S} \ni \alpha \mapsto \text{Ext}_y(\alpha)^{1/2}] \in \mathbb{P}\mathbb{R}_+^S$$

を考える。

定理 6.1 (Gardiner-Masur [9]). 写像 Φ_{GM} は単射であり、その像は相対コンパクトである。

Proof. ここでは単射性のみを確認する。相対コンパクト性は、その証明は難しくはないが極値的長さの評価が必要となるので省略する。

$y_1, y_2 \in T(X)$ について $\Phi_{GM}(y_1) = \Phi_{GM}(y_2)$ とする。このとき、写像 Φ_{GM} 及び射影類の定義から、ある $c > 0$ が存在して

$$\text{Ext}_{y_1}(\alpha)^{1/2} = c \cdot \text{Ext}_{y_2}(\alpha)^{1/2}$$

が任意の $\alpha \in \mathcal{S}$ に対して成立する。このとき Kerckhoff の公式 (命題 4.4) により、

$$d_T(y_1, y_2) = \frac{1}{2} \log \sup_{\alpha \in \mathcal{S}} \frac{\text{Ext}_{y_1}(\alpha)}{\text{Ext}_{y_2}(\alpha)} = \log c$$

が成立する。一方 d_T は距離関数であるので、

$$\log c = d_T(y_1, y_2) = d_T(y_2, y_1) = \frac{1}{2} \log \sup_{\alpha \in \mathcal{S}} \frac{\text{Ext}_{y_2}(\alpha)}{\text{Ext}_{y_1}(\alpha)} = -\log c$$

となり、 $\log c = 0$ つまり $d_T(y_1, y_2) = 0$ となる。故に $y_1 = y_2$ である。 \square

写像 Φ_{GM} の像の閉包 $\text{cl}_{GM}(T(X))$ を $T(X)$ の **Gardiner-Masur 閉包 (GM 閉包)** もしくは **Gardiner-Masur コンパクト化 (GM コンパクト化)**、そして補集合

$$\partial_{GM}T(X) = \text{cl}_{GM}(T(X)) - \Phi_{GM}(T(X))$$

を **Gardiner-Masur 境界 (GM 境界)** と呼ぶ。定義から、GM 閉包および GM 境界は射影空間 $\mathbb{P}\mathbb{R}_+^S$ の部分集合である。

6.2. Thurston コンパクト化. ここでは、比較のため Thurston コンパクト化について復習する。 $y = (Y, f) \in T(X)$ と $\alpha \in \mathcal{S}$ に対して $\ell_y(\alpha)$ により Y 上の $f(\alpha)$ にホモトピックな双曲計量に関する測地線の長さとする。このとき写像

$$\Phi_{GM}: \exists T(X) \ni y \mapsto [\mathcal{S} \ni \alpha \mapsto \ell_y(\alpha)] \in \mathbb{P}\mathbb{R}_+^S$$

は単射かつ相対コンパクトであることが知られている (cf. [6]). この像の閉包を **Thurston コンパクト化**、そして像の閉包内の補集合を **Thurston 境界** と呼ぶ。このとき、次のことが成立する。

定理 6.2 (Thurston). *Thurston 境界は PMF と一致する。さらに、Thurston コンパクト化 $T(X) \cup \text{PMF}$ は ξ_0 -次元の閉球と同相である。*

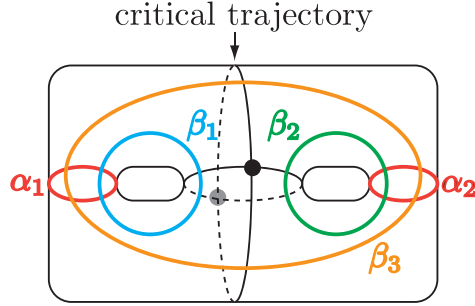


FIGURE 2. Gardiner と Masur の例

7. GARDINER-MASUR コンパクト化

この章では現在知られている Gardiner-Masur コンパクト化の性質ついて記す。

7.1. Gardiner と Masur の結果. Gardiner と Masur 自身により次のことが示された。

定理 7.1 (Gardiner-Masur). 一般に $\mathcal{PMF} \subset \partial_{GM}T(X)$ である. さらに $\xi_0 \geq 4$ であれば $\mathcal{PMF} \neq \partial_{GM}T(X)$ である.

Gardiner と Masur は定理 7.1 を証明する際に次のことを証明した (§2.2 及び §5.2 を参照せよ).

定理 7.2 (Theorem 5.1 in [9]). 任意の $[\alpha] \in \mathcal{S} \subset \mathcal{PMF}$ に対して

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi_{GM} \circ R_{[\alpha], x_0}(t) = [\alpha] \in \mathcal{PMF}$$

となる.

この定理と \mathcal{S} が \mathcal{PMF} 内で稠密であることに注意すると, $\mathcal{PMF} \subset \partial_{GM}T(X)$ がわかる.

$\xi_0 \geq 4$ の場合に \mathcal{PMF} と $\partial_{GM}T(X)$ が異なることについて, Gardiner と Masur は具体的に例を構成した. その例をここで復習する. なお, Gardiner と Masur は種数 2 の閉曲面においてその例を構成したが, その一般化は難しい.

Gardiner と Masur の例. X を種数 2 の閉リーマン面で次の対称性を持つとする (図 2 を参照せよ).

- (1) X は $\text{Ext}_X(\alpha_1) = \text{Ext}_X(\alpha_2)$ を満たす α_1, α_2 を A -サイクルを持つ.
- (2) $G = \alpha_1 + \alpha_2$ を垂直葉層構造にもつ X 上の正則二次微分 J は 2 位の零点を 2 つ持ち, さらに α_1 と α_2 の特性円環はモジュラス 1 を持つ. 従って, $\text{Ext}_{x_0}(G) = \|J\| = 2$ となる.

$h_n = \tau_{\alpha_1}^n \circ \tau_{\alpha_2}^n$ とする. ただし, τ_α は α に関する Dehn のねじり変換とする. このとき次が成立する.

定理 7.3 (Theorem 7.2 in [9]). $x_0 = (X, id)$ とする. 上記の状況において, 点列 $\{h_n(x_0)\}_n$ の GM 境界内の集積点は \mathcal{PMF} に含まれない.

証明のアイデア. $p \in \partial_{GM}T(X)$ を集積点とする. 簡単のため $h_n(x_0) \rightarrow p$ であるとする. 証明をする前に次のことに注意する.

- (a) β_1, β_2 を図 2 のようにとる. このとき, \mathcal{MF} 内において $(1/n)h_n(\beta_i)$ は α_1 に収束することが知られている ([6]) 故に, 極值的長さの連続性から

$$\frac{1}{n^2} \text{Ext}_{h_n(x_0)}(\beta_i) = \text{Ext}_{x_0}((1/n)h_n(\beta_i)) \rightarrow \text{Ext}_{x_0}(\alpha_1)$$

となる. さらに, 極值的長さの極値性から

$$c = \text{Ext}_{x_0}(\alpha_i) > \frac{L(\alpha_i, |J|^{1/2})}{A(X, |J|^{1/2})} = \frac{1}{2}$$

となる. また $\text{Ext}_{h_n(x_0)}(\beta_i)$ は無限に発散することに注意する.

- (b) $\beta \in \mathcal{S}$ が $i(\beta, \alpha_i) = 0$ ($i = 1, 2$) を満たすとき, $h_n(\beta) = \beta$ であるので,

$$\text{Ext}_{h_n(x_0)}(\beta) = \text{Ext}_{x_0}(\beta)$$

が成立する. 故に p の β -座標は 0 となる.

証明は次の 2 つのステップからなる.

ステップ 1 : 極限が \mathcal{PMF} に含まれるとすると, それは G の射影類 $[G]$ と一致すること

実際, 集積点 p が $H \in \mathcal{MF}$ の射影類 $[H] \in \mathcal{PMF}$ と一致するとする. このとき上記の注意 (b) により, $\beta \in \mathcal{S}$ が $i(G, \beta) = 0$ であれば $i(H, \beta) = 0$ が成立する. G は閉曲線の和集合からなるので, ある非負実数 w_1, w_2 を用いて $H = w_1\alpha_1 + w_2\alpha_2$ と出来る (cf. [6]). このとき上記の注意 (a) により, ある定数 $C_0 > 0$ が存在して

$$w_1 = i(H, \beta_1) = C_0 \cdot \frac{1}{n} \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Ext}_{h_n(x_0)}(\beta_1)^{1/2} = C_0 \cdot \text{Ext}_{x_0}(\alpha_1) = C_0 \cdot c$$

となる. 同様に $w_2 = C_0 \cdot c$ であるので $w_1 = w_2$ となり, 故に $[H] = [G]$ となる.

ステップ 2 : 極限が G と射影的に一致しないこと

β_3 を図 2 のようにとる. このとき $(1/n)h_n(\beta_3) \rightarrow G$ であることがわかるので,

$$\frac{1}{n^2} \text{Ext}_{h_n(x_0)}(\beta_3) \rightarrow \text{Ext}_{x_0}(G) = 2$$

となる. いま, $p = [G]$ であるとすると,

$$\frac{p(\beta_1)}{i(G, \beta_1)} = \frac{p(\beta_2)}{i(G, \beta_2)} = \frac{p(\beta_3)}{i(G, \beta_3)}$$

が成立するはずである. ただし, $p(\beta)$ などは p のリフトの β 座標とする. 一方, 上記の計算より

$$\frac{p(\beta_1)}{i(G, \beta_1)} = \frac{p(\beta_2)}{i(G, \beta_2)} = c^{1/2} \neq \frac{1}{2^{1/2}} = \frac{2^{1/2}}{2} = \frac{p(\beta_3)}{i(G, \beta_3)}$$

であるので矛盾である. □

7.2. Kerckhoff の結果. Kerckhoff の論文 [13] 内の計算を見ると次のことがわかる ([25] も見よ). なお, この結果からも, $\xi_0 \geq 4$ であれば $\mathcal{PMF} \neq \partial_{GM}T(X)$ であることがわかる.

定理 7.4 (Kerckhoff). G は複数の閉曲線からなる測度付き葉層構造とする. このとき極限

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi_{GM} \circ R_{G, x_0}(t)$$

は存在する. さらにその極限が \mathcal{PMF} に含まれるのは, $[G] \in \mathcal{S}$ であるときに限る.

8. 極值的長さの幾何

8.1. **拡張定理.** 基点 $x_0 = (X, id) \in T(X)$ を固定する. 任意の $y \in T(X)$ に対して, $K_y = \exp(2d_T(x_0, y))$ とする. このとき, \mathcal{MF} 上の連続関数 \mathcal{E}_y を

$$\mathcal{E}_y(F) = \left\{ \frac{\text{Ext}_y(F)}{K_y} \right\}^{1/2}$$

と定義する.

以下の定理において, 定義により, 任意の $p \in \text{cl}_{GM}(T(X))$ は \mathcal{S} 上の関数の射影類であることに注意する.

定理 8.1 (拡張定理 [25]). 任意の $p \in \partial_{GM}T(X)$ に対して, 次を満たす \mathcal{MF} 上の連続関数 \mathcal{E}_p が正の定数倍を除いて一意に存在する.

(1) 関数

$$\mathcal{S} \ni \alpha \mapsto \mathcal{E}_p(\alpha)$$

の射影類は p に一致する.

(2) p に収束する $T(X)$ 内の点列 $\{y_n\}_{n=1}^\infty$ に対して, 部分列 $\{y_{n_j}\}_j$ および $t_0 > 0$ で, $\mathcal{E}_{y_{n_j}}$ が $t_0 \mathcal{E}_p$ に \mathcal{MF} 上局所一様収束するようなものが存在する.

証明は, 連続関数族 $\{\mathcal{E}_y\}_{y \in T(X)}$ が正規族であることを証明することによりなされる. 極限の一意性は $\mathbb{R}_+ \otimes \mathcal{S}$ が \mathcal{MF} 内で稠密であることからわかる.

今, \mathcal{E}_p が正の定数倍を除いて一意に定まることに注意する. そこで \mathcal{E}_p を

$$\max_{H \in \mathcal{MF}_1} \mathcal{E}_p(H) = 1$$

となるように正規化する. ただし,

$$\mathcal{MF}_1 = \{H \in \mathcal{MF} \mid \text{Ext}_{x_0}(H) = 1\}$$

である. 今, 命題 4.3 と命題 4.5 により

$$\max_{H \in \mathcal{MF}_1} \mathcal{E}_y(H) = 1$$

が任意の $y \in T(X)$ に対して成立することに注意する. このとき, 定理 8.1 内の主張 (2) は次のように拡張されることは簡単にわかる.

命題 8.1 (GM 閉包の位相 (cf. Lemma 3.1 in [27])). $\{p_n\}_n \subset T(X)$ および $p \in T(X)$ に対して, 次は同値である.

- (1) p_n は p に収束する.
- (2) \mathcal{E}_{p_n} が \mathcal{E}_p に \mathcal{MF} 上で局所一様収束する.

8.2. **タイヒミュラー測地線の極限.** Gardiner, Masur および Kerckhoff の結果により, いくつかの場合にはタイヒミュラー測地線の極限があること示されている. 実はタイヒミュラー測地線は必ず極限をもつ. 実際, 次が成立する.

定理 8.2 ([26]). 任意の $[G] \in \mathcal{PMF}$ に対して極限

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi_{GM} \circ R_{G, x_0}(t)$$

は存在する. さらに異なる 2 つの射影的測度付き葉層構造に対する極限は異なる.

なお, 極限の存在については現在は一般化されている. 実際, 最近 L. Liu と W. Su の論文 [17] によれば, タイヒミュラー空間内の概測地線は極限を持つ. このことについては §8.5 においても触れる. なお, [28] において与えられた定理 8.2 の存在についての証明は彼らの証明とは異なることを注意しておく.

また、定理 8.2 の後半は次のようにも言うことが出来る。極限の存在から、写像

$$\mathcal{G}_{x_0} : \mathcal{PMF} \ni [G] \mapsto \lim_{t \rightarrow \infty} \Phi_{GM} \circ R_{G,x_0}(t) \in \partial_{GM}T(X)$$

が定義できる。つまり定理 5.2 により与えられた指数写像が

$$\mathcal{PMF} \times [0, \infty] / \mathcal{PMF} \times \{0\} \ni ([G], t) \mapsto R_{G,x_0}(t) \in \text{cl}_{GM}(T(X))$$

まで拡張される。ただし、ここでは

$$R_{G,x_0}(\infty) = \mathcal{G}_{x_0}([G]) = \lim_{t \rightarrow \infty} \Phi_{GM} \circ R_{G,x_0}(t)$$

である。タイヒミュラーの定理 (定理 5.2) と組み合わせると、定理 8.2 は指数写像の拡張および写像 \mathcal{G}_{x_0} が単射であることを言っていることに他ならない。しかし、この写像について次がわかる。

定理 8.3. 写像 $\mathcal{G}_{x_0} : \mathcal{PMF} \rightarrow \partial_{GM}T(X)$ は全射ではない。さらに連続でもない。

連続でないことは次のようにしてわかる。実際、定理 7.2 により $\mathcal{G}_{x_0}([\alpha]) = [\alpha]$ が任意の $\alpha \in \mathcal{S}$ に対して成立する。一方、 G を 2 つ以上の閉曲線からなる測度付き葉層構造とする。 \mathcal{S} は \mathcal{PMF} 内で稠密であるので、 $[\alpha_n] \rightarrow [G]$ となる列 $\{\alpha_n\}_n \subset \mathcal{S}$ をとることができる。故に、仮に $[G]$ で \mathcal{G}_{x_0} が連続であるとする、 $\mathcal{G}_{x_0}([G]) = [G] \in \mathcal{PMF}$ が成立するはずである。しかし、これは定理 7.4 より矛盾である。

全射ではないことは、次のことを示すことによりわかる。少々計算が必要であるのでここでは省略する。

命題 8.2 (到達不可能性 [25]). G を 2 つ以上の閉曲線からなる測度付き葉層構造とする。このとき、 $[G]$ はタイヒミュラー測地線の極限とはなり得ない。

概測地線についても到達不可能な境界点が存在する。このことについては §8.5 において触れる。

8.3. 指数写像の極限点の連続性. では「 \mathcal{G}_{x_0} はどのような点で連続であろうか？」という素朴な疑問が生じる。ここでは、それについて述べる。上記の定理 8.3 の非全射性の証明の議論と \mathcal{S} が \mathcal{PMF} 内で稠密であることから、 \mathcal{G}_{x_0} が連続であるような点は \mathcal{PMF} の点でなければならないことに注意する。

$G \in \mathcal{MF}$ が次の性質を満たすとき**一意エルゴード的**であるという： $F \in \mathcal{MF}$ が $i(F, G) = 0$ であることと、ある $t \geq 0$ が存在して、 $F = tG$ となることは同値である (例えば [5] の Lemma 2.1 を見よ)。

また $G \in \mathcal{MF}$ に対して

$$\mathcal{N}(G) = \{H \in \mathcal{MF} \mid i(H, G) = 0\}$$

とする。 G が一意エルゴード的であれば $\mathcal{N}(G) = \{tG \mid t \geq 0\}$ となる。また $F \in \mathcal{MF}$ が $\mathcal{N}(F) = \mathcal{N}(\alpha)$ がある $\alpha \in \mathcal{S}$ に対して成立すれば $F = t\alpha (t \geq 0)$ となる。ここで

$$\mathcal{PMF}^{UE} = \{[G] \in \mathcal{PMF} \mid G \text{ は一意エルゴード的}\}$$

$$\mathcal{PMF}_0 = \mathcal{PMF}^{UE} \cup \mathcal{S}$$

とする。

定理 8.4 (\mathcal{G}_{x_0} の連続点 [26]). \mathcal{G}_{x_0} は次の意味で \mathcal{PMF}_0 上で双連続である。

- (1) \mathcal{G}_{x_0} は \mathcal{PMF}_0 の各点で連続である。
- (2) 逆写像 $\mathcal{G}_{x_0}^{-1}$ は次の意味で連続である： $\{[G_n]\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{PMF}$ および $[G] \in \mathcal{PMF}_0$ が $\mathcal{G}_{x_0}([G_n]) \rightarrow \mathcal{G}_{x_0}([G])$ であれば $[G_n] \rightarrow [G]$ である。

Masur [20] によれば, \mathcal{PMF} 上には自然な測度があり, その測度において $\mathcal{PMF} \setminus \mathcal{PMF}^{UE}$ は測度 0 である. 故に, 定理 8.4 により \mathcal{G}_{x_0} はほとんど至る所連続であることがわかる.

8.4. **ホロ関数閉包と GM 閉包.** 最近, Liu と Su は論文 [17] において次のことを示した.

定理 8.5 (Liu-Su). タイヒミュラー空間の GM 閉包は, タイヒミュラー距離に関するホロ境界閉包と一致する.

ここで, ホロ関数閉包について復習する. 以下, $((M, x_0), \rho)$ を基点付き距離空間とする.

8.4.1. **ホロ関数閉包.** $C(M)$ を M 上の連続関数の全体とし, 有界集合上の一様収束により位相を入れたものとする. $\mathbb{R} \subset C(M)$ を定数関数全体とする. このとき,

$$M \ni x \mapsto \rho(x_0, x) \in C_*(M) = C(M)/\mathbb{R}$$

は埋め込みである. ただし \mathbb{R} は平行移動として $C(M)$ に作用する. この埋め込みによる閉包を **ホロ関数閉包 (horofunction closure)** とよび, 閉包内の像の補集合を **ホロ関数境界 (horofunction boundary)** と呼ぶ ([4], [10] を見よ). M が局所コンパクトかつ可算基を持てば, ホロ関数閉包はコンパクトであり, 可算基を持つ (cf. Proposition 4.6 in [31]).

Rieffel ([31]) は, 独立に **距離閉包 (metric closure)** および **距離境界 (metric boundary)** を定義した. それらの定義をここでは復習しないが, 同論文 [31] において, Rieffel はそれぞれ上記のホロ関数閉包およびホロ関数境界と一致することを示した. 従って, 距離閉包・境界についての概念がホロ関数閉包・境界に対しても使えることに注意する.

8.4.2. **概測地線と Busemann 点.** Rieffel ([31]) による **概測地線 (almost geodesic ray)** を復習する. $T \subset [0, \infty)$ を 0 を含む非有界集合とする. 写像 $\gamma: (T, 0) \rightarrow (M, x_0)$ が次の性質を満たすとき, **概測地線**であるという: 任意の $\epsilon > 0$ に対して $t, s \in T$ かつ $t \geq s \geq N$ であれば

$$|\rho(\gamma(t), \gamma(s)) + \rho(\gamma(s), x_0) - t| < \epsilon$$

となる $N \geq 0$ が存在する.

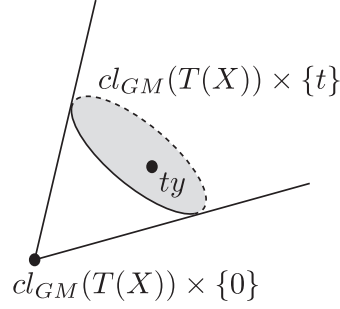
Rieffel により, 次のことが示された.

命題 8.3 ([31]). (M, x_0) が完備かつ局所コンパクト距離空間とする. このとき, 任意の概測地線はホロ関数境界に極限を持つ.

Rieffel に従って, ホロ関数境界の点 p が, 概測地線の極限点となるとき, その点を **Busemann 点**と呼ぶ. 命題 8.3 と Liu と Su の結果を用いると次を得る.

命題 8.4 ([17]). タイヒミュラー空間内のタイヒミュラー距離に関する概測地線は GM 境界に極限を持つ.

なお, [28] では, 「純粹に」タイヒミュラー理論のみを用いた概測地線の収束の証明を与えている.

FIGURE 3. 錐 \mathcal{MC}_{GM}

8.5. **タイヒミュラー空間内の概測地線の到達不可能性.** タイヒミュラー空間内の概測地線の振る舞いについては次がわかる.

定理 8.6 (Theorem 1.1 in [28]). $\xi_0 \geq 4$ の時, タイヒミュラー空間のタイヒミュラー距離に関するホロ関数境界は *Busemann* 点でない境界点を含む.

定理 8.6 は次の定理から導かれる.

定理 8.7 (Theorem 1.2 in [28]). $\xi_0 \geq 4$ とする. $G \in \mathcal{MF}$ を X 上のパンツ分解により定まる測度付き葉層構造とする. このとき, タイヒミュラー空間の GM 閉包において $[G] \in \mathcal{PMF} \subset \partial_{GM}T(X)$ はどのような概測地線の極限にもなり得ない.

8.6. **交点数関数と Gromov 積の拡張.** Liu と Su の結果 (定理 8.5) は, GM 閉包はタイヒミュラー距離に関して自然なコンパクト化になっているという一つの「状況証拠」である. ここでは, タイヒミュラー距離から定まる Gromov 積の拡張性という更なる状況証拠を提示し, その自然性を主張する.

いま, 錐 \mathcal{MC}_{GM} および \mathcal{MT}_{GM} を次のように定義する (図 3 参照).

$$\begin{aligned}\mathcal{MC}_{GM} &= \text{cl}_{GM}(T(X)) \times [0, \infty) / (\text{cl}_{GM}(T(X)) \times \{0\}) \\ \mathcal{MT}_{GM} &= T(X) \times [0, \infty) / (T(X) \times \{0\})\end{aligned}$$

ここで $(p, t) \in \mathcal{MC}_{GM}$ を tp と略記する. また \mathcal{MC}_{GM} には自然に正数倍の作用を持つことに注意する. いま, $\text{proj} : \mathbb{R}_+^S \rightarrow \mathbb{P}\mathbb{R}_+^S$ を射影とする. ここで,

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_{GM} &= \text{proj}^{-1}(\text{cl}_{GM}(T(X))) \\ \mathcal{T}_{GM} &= \text{proj}^{-1}(\Phi_{GM}(T(X)))\end{aligned}$$

とする.

いままでと同様に基点 $x_0 \in T(X)$ を固定する. このとき写像 $\tilde{\Psi}_{x_0} : \mathcal{MC}_{GM} \rightarrow \mathcal{C}_{GM}$ を

$$\tilde{\Psi}_{x_0} : \mathcal{MC}_{GM} \ni tp \mapsto [\mathcal{S} \ni \alpha \mapsto t\mathcal{E}_p(\alpha)]$$

と定義する. $\tilde{\Phi}_{x_0}$ は同相写像であり, $\tilde{\Psi}_{x_0}(\mathcal{MT}_{GM}) = \mathcal{T}_{GM}$ となる. いま $\mathcal{PMF} \subset \partial_{GM}T(X)$ であるので, $\mathcal{MF} \subset \mathcal{C}_{GM}$ であることに注意する.

定理 8.8 (交点数関数の拡張 [29]). 次を満たす連続関数

$$(8.1) \quad i(\cdot, \cdot) : \mathcal{C}_{GM} \times \mathcal{C}_{GM} \rightarrow \mathbb{R}$$

が一意的に存在する.

(1) 任意の $ty, sz \in \mathcal{MT}_{GM}$ ($t, s \geq 0, y, z \in T(X)$) に対して

$$i(\tilde{\Psi}_{x_0}(ty), \tilde{\Psi}_{x_0}(sz)) = ts \exp(-2\langle y, z \rangle_{x_0})$$

が成立する.

(2) $F, G \in \mathcal{MF}$ に対する関数 (8.1) の値 $i(F, G)$ は従来の幾何学的交点数と一致する.

ただし, $\langle y, z \rangle_{x_0}$ は **Gromov 積**

$$\langle y, z \rangle_{x_0} = \frac{1}{2}(d_T(x_0, y) + d_T(x_0, z) - d_T(y, z))$$

である. $\tilde{\Phi}_{x_0}$ が同相写像であるから, 上記の交点数の拡張性から次を得る.

定理 8.9 (Gromov 積の拡張性 [29]). 次を連続関数

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{x_0}: \text{cl}_{GM}(T(X)) \times \text{cl}_{GM}(T(X)) \rightarrow [0, \infty]$$

が存在する.

(1) 任意の $y, z \in T(X)$ に対して

$$\langle y, z \rangle_{x_0} = \frac{1}{2}(d_T(x_0, y) + d_T(x_0, z) - d_T(y, z))$$

が成立する.

(2) $[F], [G] \in \mathcal{PMF} \subset \partial_{GM}T(X)$ に対して

$$\exp(-2\langle [F], [G] \rangle_{x_0}) = \frac{i(F, G)}{\text{Ext}_{x_0}(F)^{1/2} \text{Ext}_{x_0}(G)^{1/2}}$$

が成立する.

9. 双曲的長さと極値的長さから定まる幾何の比較

定義から, Thurston 境界は曲面上の単純閉曲線の双曲的長さの「退化」を集めたものである. Thurston の結果 (定理 6.2) は単純閉曲線の双曲的長さの退化は交点数関数を用いることにより表現できることを意味する. 同様の言い方により表現すると, Gardiner-Masur 境界は曲面上の単純閉曲線の極値的長さの「退化」を集めたものである.

従って, 双曲的長さと極値的長さの無限遠での比較は, 両コンパクト化の性質の比較により現れる. ここでは, その比較のため現在知られている両コンパクト化結果を復習する.

9.1. Masur と Lenzhen の結果. タイヒミュラー測地線の振る舞いに関しては次の Masur と Lenzhen の結果が知られている.

定理 9.1 (Masur [19]). 次が成立する.

(1) $G = \sum_{i=1}^k w_i \alpha_i \in \mathcal{MF}$ ($w_i > 0, \alpha_i \in \mathcal{S}$) の場合, タイヒミュラー測地線 R_{G, x_0} は Thurston コンパクト化において収束し, その極限は重心

$$[\alpha_1 + \cdots + \alpha_k] \in \mathcal{PMF}$$

である.

(2) $G \in \mathcal{MF}$ が一意エルゴード的の場合, タイヒミュラー測地線 R_{G, x_0} は収束し, その極限は G の射影類 $[G] \in \mathcal{PMF}$ である.

定理 9.2 (Lenzhen [15]). Thurston コンパクト化において, 極限を持たない (つまり集積点を 2 点以上持つ) タイヒミュラー測地線が存在する.

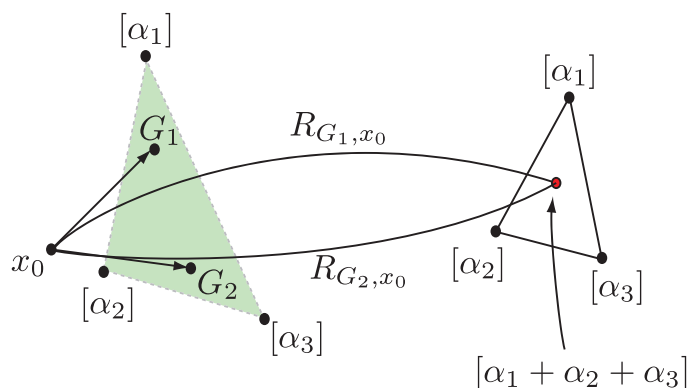


FIGURE 4. Thurston コンパクト化内での測地線の振る舞い。ただし、図において G_i は $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ の「線形結合」で表される測度付き葉層構造とする。

特に定理 9.1 より、Thurston コンパクト化において異なる測地線が同じ極限を持つことがあることがわかる (図 4 を参照せよ)。

9.2. Walsh の結果. C. Walsh は論文 [33] において、非対称な距離をもつ空間に対してホロ関数閉包を定義し、Thurston コンパクト化の一つの特徴付けを与えた。ここではその結果をのみを復習する。非対称距離に対するホロ関数閉包については Walsh の論文 [33] の §2 を参照せよ。

$y_1, y_2 \in T(X)$ に対して

$$(9.1) \quad d_L(y_1, y_2) = \log \sup_{\alpha \in \mathcal{S}} \frac{\ell_{y_2}(\alpha)}{\ell_{y_1}(\alpha)}$$

と定義する。 d_L は一般に対称性を満たさない、つまり $d_L(y_1, y_2) \neq d_L(y_2, y_1)$ がある 2 点 y_1, y_2 に対して成り立つが、次のことが成立する。

- $d_L(y_1, y_2) = 0$ であることと $y_1 = y_2$ であることは同値である。
- $y_1, y_2, y_3 \in T(X)$ に対して三角不等式

$$d_L(y_1, y_3) \leq d_L(y_1, y_2) + d_L(y_2, y_3)$$

が成立する。

このように定義される非対称距離関数 (9.1) を **Thurston のリプシッツ距離関数** と呼ぶ。

定理 9.3 (Walsh). *Thurston* のリプシッツ距離空間 $(T(X), d_L)$ に関するホロ関数閉包は *Thurston* コンパクト化と一致する。さらに、その境界の各点は *Busemann* 点である。

REFERENCES

- [1] L. V. Ahlfors, *Lectures on Quasiconformal Mappings*, Van Nostrand Mathematical Studies, vol. 10. D. Van Nostrand Co., Inc., Toronto, Ont.-New York-London (1966).
- [2] ———, *Conformal invariants: Topics in Geometric Function Theory*, McGraw-Hill, New York (1973).
- [3] Z. Balogh and M. Bonk, Gromov hyperbolicity and the Kobayashi metric on strictly pseudoconvex domains, *Comment. Math. Helv.* **75** (2000), no. 3, 504–533.
- [4] M. Bridson and A. Haefliger, *Metric spaces of Non-positive curvature*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften **319**, Springer Verlag (1999).

- [5] R. Diaz and C. Series, Limit points of lines of minima in Thurston's boundary of Teichmüller space, *Algebraic & Geometric Topology* **3** (2003), 207–234.
- [6] A. Douady, A. Fathi, D. Fried, F. Laudenbach, V. Poénaru, and M. Shub, *Travaux de Thurston sur les surfaces*, Séminaire Orsay (seconde édition). Astérisque No. 66-67, Société Mathématique de France, Paris (1991).
- [7] M. Duchin, C.J. Leininger, and K. Rafi, Length spectra and degeneration of flat metrics, *Invent. Math.* **182** (2010), 231–277.
- [8] F. Gardiner, Measured foliations and the minimal norm property for quadratic differentials, *Acta Math.* **152** (1984), no. 1-2, 57–76.
- [9] F. Gardiner and H. Masur, Extremal length geometry of Teichmüller space. *Complex Variables Theory Appl.* **16** (1991), no. 2-3, 209–237.
- [10] M. Gromov, Hyperbolic manifolds, groups and actions, In *Riemann surfaces and related topics*, Proceedings of the 1978 Stony Brook Conference, 182–213, Princeton University Press (1981).
- [11] J. Hubbard, and H. Masur, Quadratic differentials and foliations, *Acta Math.* **142** (1979), no. 3-4, 221–274.
- [12] Y. Imayoshi and M. Taniguchi, *Introduction to Teichmüller spaces*, Springer-Verlag (1992).
- [13] S. Kerckhoff, The asymptotic geometry of Teichmüller space, *Topology* **19** (1980), 23–41.
- [14] O. Lehto and K. Virtanen, *Quasiconformal mappings in the plane, Second edition*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band **126**. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, (1973).
- [15] A. Lenzhen, Teichmüller geodesics that do not have a limit in \mathcal{PMF} , *Geom. Topol.* **12** (2008), no. 1, 177–197.
- [16] L. Liu, A. Papadopoulos, W. Su and G. Théret, Length spectra and the Teichmüller for surfaces with boundary, *Monatsh Math* **161**, 295–311 (2010).
- [17] L. Liu and W. Su, The horofunction compactification of Teichmüller metric, preprint, ArXiv.org : <http://arxiv.org/abs/1012.0409>.
- [18] A. Marden, and K. Strebel, The height theorem for quadratic differentials on Riemann surfaces, *Acta. Math* **153** (1984), 153–211.
- [19] H. Masur, On a class of geodesics in Teichmüller space. *Ann. of Math.* **102** (1975), 205–221.
- [20] ———, Interval exchange transformations and measured foliations, *Ann. of Math.* **115** (1982), 169–200.
- [21] H. Masur and M. Wolf, Teichmüller space is not Gromov hyperbolic, *Ann. Acad. Sci. Fenn.* **20** (1995), 259–267.
- [22] A. Marden and H. Masur, A foliation of Teichmüller space by twist invariant disks, *Math. Scand.* **36** (1975), 211–228.
- [23] J. McCarthy and A. Papadopoulos, The visual sphere of Teichmüller space and a theorem of Masur-Wolf, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.* **24** (1999), 147–154.
- [24] H. Miyachi, On the Gardiner-Masur boundary of Teichmüller spaces Proceedings of the 15th ICFIDCAA Osaka 2007, OCAMI Studies 2 (2008), 295–300.
- [25] ———, Teichmüller rays and the Gardiner-Masur boundary of Teichmüller space. *Geom. Dedicata* **137** (2008), 113–141.
- [26] ———, Teichmüller rays and the Gardiner-Masur boundary of Teichmüller space II, submitted.
- [27] ———, Lipschitz algebra and compactifications of Teichmüller space, submitted.
- [28] ———, Teichmüller has non-Busemann points, submitted.
- [29] ———, Unification of the extremal length geometry on Teichmüller space via intersection number, submitted.
- [30] Y. Minsky, Teichmüller geodesics and ends of hyperbolic 3-manifolds. *Topology* **32**, 625–647 (1993).
- [31] M. Rieffel, Group C^* -algebra as compact quantum metric spaces, *Doc. Math.* **7** (2002), 605–651.
- [32] K. Strebel, *Quadratic Differentials*, Springer Verlag, Berlin and New York (1984).
- [33] C. Walsh, The horoboundary and isometry group of Thurston's Lipschitz metric, preprint, ArXiv.org : <http://arxiv.org/abs/1006.2158>
- [34] C. Webster and A. Winchester, Busemann points of infinite graphs, *Trans. Amer. Math. Soc.* **358** (2006), 4209–4224.

〒 560-0043, 大阪府豊中市待兼山町 1-1 大阪大学大学院理学研究科数学専攻