Langlands-Shahidi method 概説

大阪大学理学研究科　森山 知則
(Tomonori Moriyama)

0　序

保型 L 関数は, 大域体 F 上定義された簡約可能代数群 G の保型表現 $\pi \cong \otimes' \pi_v$ と G の L 群 ${}^L G$ の複素解析的な有限次元既約表現 $r : {}^L G \to GL(V)$ が与えられたとき，Euler 積 $L(s,\pi,r) = \prod_v L(s,\pi_v,r)$ として定義されるべきものである ([成田, §3])。ここで, v が良い有限素点であるとき (i.e. $G(F_v)$ が「良い」極大コンパクト部分群 K_v をもち，π_v が K_v に関する不変ベクトルを持つとき), $L(s,\pi_v,r)$ は π_v の Satake parameter $A_v \in {}^L G$ を用いて

$$L(s,\pi_v,r) := \det(\mathrm{id}_V - r(A_v)q_v^{-s})^{-1}$$

で与えられる ([成田, §3])。ここで，q_v は F の v における剰余体の位数である。また，無限素点 v においては，π_v の Langlands parameter を通じて，$L(s,\pi_v,r)$ と ϵ 因子 $\epsilon(s,\pi_v,r,\psi_v)$ が定義される ([Bo-1979, §11])。このようにして，殆どすべての素点において L 因子 $L(s,\pi_v,r)$ を定義した後に, 次のような問題が持ち上がる:

(i) 部分 Euler 積 $L^S(s,\pi_v,r) := \prod_{v\notin S} L(s,\pi_v,r)$ (S は「悪い」素点の全体) は $\mathrm{Re}(s) \gg 0$ で絶対収束するか？

(ii) 部分 Euler 積 $L^S(s,\pi_v,r)$ は全 s-平面に有理型に解析接続されるか？

(iii) 上で除外した S に属す素点 v において，L 因子 $L(s,\pi_v,r)$ と ϵ 因子 $\epsilon(s,\pi_v,r,\psi_v)$ を定義して, 完全な関数等式を満たすようにできるか？

(i) は π がカスプ保型表現の場合, Satake parameter の自明な評価によって保証される (「自明な絶対収束域」もわかる。[都築, §2])。一般の π に対してもカスプ保型表現の場合に帰着することで確かめられる ([Bo-1979, §14])。(ii) に関して，R. P. Langlands は, “Euler products”([La-1971]) において，G がより大きな簡約可能代数群 H の極大放物型部分群の Levi 部分群であり，r がこの組 $H \supset G$ から決まるある特別な表現（たち）の場合に，$L^S(s,\pi,r)$ が有理型関数として解析接続される事を示した ([La-1971] では, G と H が F 上分裂している場合が扱われている)。その証明は，[都築] で解説されたように，π に属すカスプ形式から H 上の Eisenstein 級数を構成し, その定数項が, 悪い素点からの寄与を除いて，π の L 関数の商 $L(s,\pi,r)/L(1+s,\pi,r)$ を用いて表されることを利用するものである (最も簡単な場合が，一変数実解析的 Eisenstein 級数の定数項の計算。[石井, §3.2])。こうして，特別な G および r に限ってではあるが，(ii) に関しても肯定的な解答が得られた。しかしながら，この手法では，L 関数自身ではなく，その商が現れるため，関数等式を得るには至らなかった。その後 F. Shahidi は, “Euler products”で扱われたものと同じ Eisenstein 級数の，定数項ではなく，その Whittaker 係数と呼ばれるある種のフーリエ展開係数を計算し，悪い素点からの寄与を除いてそれが $L(s+1,\pi,r)^{-1}$ で書けることを見出した（ただし，π が大域 Whittaker 模型を持つという仮定が必要である)。この事実を利

用して, 保型 L 関数の関数等式をはじめとする解析的な性質をさらに深く調べることができるようになった。上記の研究手法は, Langlands-Shahidi method と呼ばれ，その基礎部分は，Shahidi によって，１９７０年代後半から１９９０年頃にかけて構築された。その後１９９０年代後半になって,「$GL(N)$ の逆定理」([C-PS-1994], [C-PS-1999]) を利用した Langlands 函手性予想への応用がもたらされている ([C-K-PS-S-2001], [Ki-Sh-2002], [A-S-2006a],[A-S-2006b] etc...) 。なお，このように近年さらに進展を遂げた Langlands-Shahidi method であるが，(現在のところ) 大域 Whittaker 模型を持つという強い制約の課された カスプ保型表現の，特別な $r : {}^LG \to GL(V)$ に関する L 関数 $L(s, \pi, r)$ に対してのみ適用可能である事は注意すべきである (とはいうものの，r として，興味あるものを多く含む, [Shah-1988, §4], [Ki-2004, Lecture 6] のリストを参照)。一方，この報告集の preface で述べられているように，保型 L 関数を研究するもうひとつの主要な手段は, Rankin-Selberg method である。E. Hecke, および R. Rankin，A. Selberg による一変数楕円保型形式に対する L 関数の積分表示 ([石井]) の流れを汲むこの手法は, [石川] で詳しく解説される。これら２つの研究手法は，保型形式を含む何らかの大域的な積分を Euler 積と結びつけることから出発するが，そのプロセスは異なりそれぞれに長所短所がある ([成田, §3.4])。

本稿では，Langlands-Shahidi method とはどのような手法なのか, そのごく基礎的な部分を解説したい。具体的には，[都築] でも扱われた $GL(n_1) \times GL(n_2)$ の convolution L 関数 $L(s, \pi_1 \times \pi_2, \mathrm{Std}_{n_1} \boxtimes \mathrm{Std}_{n_2}^{\vee})$ を例にとって話を進める (Rankin-Selberg method による研究に関しては，[石川, 第１章])。特に，crude functional equation に至る計算を，[Ki-2002] を参考にしながら少し詳しく説明する。また，最近の進展の一例として，GSp_4 上の大域 Whittaker 模型を持つカスプ形式の GL_4 への functorial lifting についても，簡単に述べる。本稿では，Langlands-Shahidi method の一つの醍醐味ともいえる分岐有限素点での扱いや各種の応用 (例: 局所体上の簡約可能代数群のユニタリ表現論への応用）については，ほとんど解説することができなかった。興味をもたれた方は [Ge-Sh-1988], [Shah-2007], [Ki-2004] 等の概説およびそこに引用されている原論文を参照して頂ければ幸いである。

目次

$\boxed{1}$ 準備：大域及び局所 Whittaker 関数— GL_n case —

序で述べたように，Langlands-Shahidi method は，Whittaker 模型を持つカスプ形式に対して適用される。Whittaker 模型（関数）は，(準分裂) 簡約代数群 ((quasi-split) reductive algebraic group) 上の保型形式のフーリエ展開の展開係数として生じるものである。本節では，次節以降の準備として，Whittaker 関数 (模型) に関する基本事項をまとめる。以下，簡単のため $G = GL_n$ の場合を例にとって述べるが，局所理論に関する限りは，一般の場合でも同様のことが成り立つ（一方，大域理論では GL_n と一般の準分裂簡約可能代数群では重大な相違点がある。定理１と定理６の後の注意を参照)。

(1.1) 大域 Whittaker 関数. さて，$G = GL_n$ とし，$B = TU$ をその Borel 部分群とする。ここで，

$$T \equiv T_n := \{\mathrm{diag}(t_1, t_2, \cdots, t_n) | t_i \in \mathbf{G_m}\}, \quad U \equiv U_n := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & * \\ & 1 & \cdots & * \\ & & \ddots & * \\ & & & 1 \end{pmatrix} \in G \right\}$$

である。いま，これらを有理数体 $\mathbf{Q}$ 上の代数群と見る (以下の話は，一般の代数体上でも展開できるが，記号の煩雑さ等を避けるため基礎体を $\mathbf{Q}$ とする）。$\mathbf{Q}$ のアデール環を $\mathbf{A} = \prod' \mathbf{Q}_v$, その有限部分を $\mathbf{A}_\mathrm{f} = \prod'_{p<\infty} \mathbf{Q}_p$ であらわす。任意の $\mathbf{Q}$-代数 R に対して，G の R-値点のなす群を $G(R)$ であらわす。$G(\mathbf{A})$ の標準的な極大コンパクト部分群を

$$K_\mathbf{A} := \prod_v K_v = O(n) \times \prod_{p<\infty} GL(n, \mathbf{Z}_p)$$

で表す。また，$\mathfrak{g} := \mathrm{Lie}(G(\mathbf{R}))$ とおく。非自明な additive character $\psi : \mathbf{A}/\mathbf{Q} \to \mathbf{C}^{(1)}$ を $\psi(t_\infty) = \exp(2\pi\sqrt{-1}t_\infty)$ $(t_\infty \in \mathbf{R})$ で特徴づけられるものに取り，$U(\mathbf{A})$ の非退化指標 $\psi_U : U(\mathbf{A}) \to \mathbf{C}^{(1)}$ を

$$\psi_U(\begin{pmatrix} 1 & x_{1,2} & * & \cdots & * \\ & 1 & x_{2,3} & \cdots & * \\ & & 1 & \cdots & * \\ & & & \ddots & x_{n-1,n} \\ & & & & 1 \end{pmatrix}) = \psi(\sum_{i=1}^{n-1} x_{i,i+1})$$

で定める。ψ_U は，$U(\mathbf{Q})$ 上では自明であることに注意する。$G(\mathbf{A})$ 上の保型形式の空間，カスプ形式の空間をそれぞれ $\mathcal{A}(G)$，$\mathcal{A}_0(G)$ で表す (定義は，[成田], [都築] を参照)。$G(\mathbf{A})$ 上の保型形式 $\varphi \in \mathcal{A}(G)$ に対して, その大域 Whittaker 関数 $W_\varphi : G(\mathbf{A}) \to \mathbf{C}$ を

$$W_\varphi(g) := \int_{U(\mathbf{Q})\backslash U(\mathbf{A})} \varphi(ug)\psi_U(u)^{-1} du$$

で定義する。$W_\varphi(g)$ を φ の (ψ-番目の)Whittaker 係数と呼んで $\varphi_\psi(g)$ で表すこともある。大域 Whittaker 関数 $W_\varphi(g)$ が次の空間に属すことはすぐわかる：

$$\begin{aligned}&C^\infty(U(\mathbf{A})\backslash G(\mathbf{A});\psi_U)\\ :=&\{W : G(\mathbf{A}) \stackrel{C^\infty}{\to} \mathbf{C} \mid W(ug) = \psi_U(u)W(g), \forall(u,g) \in U(\mathbf{A}) \times G(\mathbf{A})\}.\end{aligned}$$

ここで $W \in C^\infty(U(\mathbf{A})\backslash G(\mathbf{A});\psi_U)$ に $(\mathfrak{g}, K_\infty) \times G(\mathbf{A}_\mathrm{f})$ を右移動で作用させる:

$$\begin{aligned}&[g_1 \cdot W](g) := W(gg_1) \qquad g \in G(\mathbf{A}), g_1 \in K_\infty \cdot G(\mathbf{A}_\mathrm{f}),\\ &[X \cdot W](g) \equiv W(g;X) := \frac{d}{dt}_{|t=0} W(g\exp(tX)), \qquad g \in G(\mathbf{A}),\ X \in \mathfrak{g}.\end{aligned}$$

この作用により，$C^\infty(U(\mathbf{A})\backslash G(\mathbf{A});\psi_U)$ を $(\mathfrak{g}, K_\infty) \times G(\mathbf{A}_\mathrm{f})$-加群とみなす。一般線型群 $GL_n(\mathbf{A})$ 上のカスプ形式に関して，次の事実は基本的である：

定理 1 ([Shal-1974, Theorem 5.9]). (π, V_π) を $GL_n(\mathbf{A})$ のカスプ保型表現とする。$\varphi \in V_\pi$ に対して，大域 *Whittaker* 関数 $W_\varphi \in C^\infty(U(\mathbf{A})\backslash G(\mathbf{A});\psi_U)$ を対応させる写像は，$(\mathfrak{g}, K_\infty) \times G(\mathbf{A}_\mathrm{f})$-準同型であり，しかも単射である。 □

Proof. $(\mathfrak{g}, K_\infty) \times G(\mathbf{A}_\mathrm{f})$ 準同型であることは，自明である。一方，Mirabolic 部分群 $P_{mir} := \{\left(\begin{array}{c|c} a & b \\ \hline 0 & 1\end{array}\right) \mid a \in GL_{n-1}(\mathbf{Q}), b \in \mathbf{Q}^{n-1}\}$ を用いた帰納法によって

$$\varphi(g) = \sum_{\gamma \in U_{n-1}(\mathbf{Q})\backslash GL_{n-1}(\mathbf{Q})} W_\varphi(\left(\begin{array}{c|c} \gamma & 0 \\ \hline 0 & 1\end{array}\right) g) \tag{1}$$

という等式が証明できる（すなわち，$\varphi(g)$ を $W_\varphi(g)$ から回復することができる）。この等式の証明のポイントは, 部分群 $\{\left(\begin{array}{c|c} \gamma & 0 \\ \hline 0 & 1\end{array}\right) \mid \gamma \in GL_{n-1}(\mathbf{Q})\}$ が，共役を通じて $\{\left(\begin{array}{c|c} 1_{n-1} & x \\ \hline 0 & 1\end{array}\right) \mid x \in (\mathbf{A}/\mathbf{Q})^{n-1}\}$ の非自明指標の全体に推移的に作用することにあるが, 詳しくは原論文 [Shal-1974, p.188-p.190] を参照して欲しい (論文 [Shal-1974] の最も重要な箇所の一つ)。さて，(1) によれば, $W_\varphi(g) \equiv 0$ ならば，$\varphi(g) \equiv 0$ となるので，単射性も示された。 □

用語. 上記のような，(π, V_π) の $C^\infty(U(\mathbf{Q})\backslash G(\mathbf{A});\psi_U)$ への埋め込み (ないしはその像）を, π の (大域）Whittaker 模型と呼ぶ。

注意. 定理 1 の単射性は，$GL_n(\mathbf{A})$ 上のカスプ形式特有の性質であり, 他の簡約可能代数群では期待できない。例えば次数 $n(\geq 2)$ の正則なジーゲルカスプ形式は, 通常のやり方で ([今野, １節]) 代数群 $Sp_{2n}(\mathbf{A})$ ないしは $GSp_{2n}(\mathbf{A})$ 上のカスプ形式とみなし得るが, その Whittaker 関数は恒等的にゼロである。

(1.2) 局所 Whittaker 関数. $\pi \cong \otimes' \pi_v$ を $GL_n(\mathbf{A})$ のカスプ保型表現とする。カスプ形式 $\varphi \in \pi$ が decomposable であるとする。すなわち，同型 $\pi \cong \otimes' \pi_v$ を通じて，φ が $\otimes \xi_v^{\varphi}$ と分解しているとする。ほとんどすべての有限素点 v において，π_v は不分岐 (i.e. K_v 不変ベクトルを持つ) であり, ξ_v^{φ} は制限テンソル積を定義するときに固定した不分岐ベクトル ($= K_v$ 不変ベクトル)ξ_v° に等しい。有限ないしは無限素点 v に対して，$\psi_v := \psi_U|_{U(\mathbf{Q}_v)}$ とおいて，次の誘導表現の空間を考える:

$$\begin{aligned}&C^{\infty}(U(\mathbf{Q}_v)\backslash G(\mathbf{Q}_v);\psi_v)\\ :=&\{W : G(\mathbf{Q}_v) \overset{C^{\infty}}{\to} \mathbf{C} \mid W(ug) = \psi_v(u)W(g), \quad \forall (u,g) \in U(\mathbf{Q}_v) \times G(\mathbf{Q}_v)\}.\end{aligned}$$

このとき，$g_{0,v} = 1$ であるような $g_0 \in G(\mathbf{A})$ を固定して，合成写像

$$\pi_v \hookrightarrow \pi \hookrightarrow C^{\infty}(U(\mathbf{A})\backslash G(\mathbf{A});\psi_U) \to C^{\infty}(U(\mathbf{Q}_v)\backslash G(\mathbf{Q}_v);\psi_v)$$

を次のように定義する：

- $\pi_v \ni \xi_v \mapsto \xi_v \otimes (\otimes_{w \neq v} \xi_w^{\varphi}) \in \pi$,
- $\pi \ni \varphi \mapsto W_{\varphi} \in C^{\infty}(U(\mathbf{A})\backslash G(\mathbf{A});\psi_U)$,
- $C^{\infty}(U(\mathbf{A})\backslash G(\mathbf{A});\psi_U) \ni W \mapsto [G(\mathbf{Q}_v) \ni g_v \mapsto W(g_0 g_v) \in \mathbf{C}] \in C^{\infty}(U(\mathbf{Q}_v)\backslash G(\mathbf{Q}_v);\psi_v)$.

$v = p < \infty$ を有限素点とする。定理 1 により，$g_0 \in G(\mathbf{A})$ を，上記の合成写像 $\pi_p \to C^{\infty}(U(\mathbf{Q}_p)\backslash G(\mathbf{Q}_p);\psi_p)$ が恒等的にゼロにならないように取ることが出来る。また，この合成写像は $G(\mathbf{Q}_p)$ 準同型である。そこで，次のように定義する：

定義 2. $G(\mathbf{Q}_p)$ の許容表現 π_p に対して，

$$\mathcal{W}(\pi_p,\psi_p) := \operatorname{Hom}_{G(\mathbf{Q}_p)}(\pi_p, C^{\infty}(U(\mathbf{Q}_p)\backslash G(\mathbf{Q}_p);\psi_p))$$

と置く。絡作用素 $\Phi \in \mathcal{W}(\pi_p,\psi_p)$ による $\xi_p \in \pi_p$ の像 $\Phi(\xi_p)$ を π_p に属する局所 Whittaker 関数と呼ぶ。 □

上の考察から，次が分かる。

命題 3. $G(\mathbf{Q}_p)$ の既約許容表現 π_p が, ある大域的なカスプ保型表現 π の局所成分ならば, $\mathcal{W}(\pi_p,\psi_p) \neq \{0\}$ である。 □

ところで，次が知られている。

定理 4 (局所 Whittaker 模型の一意性 (p-adic case), [Ro-1973, Theorem 3])**.** π_p を $G(\mathbf{Q}_p)$ の任意の既約許容表現とする。このとき

$$\dim_{\mathbf{C}} \mathcal{W}(\pi_p,\psi_p) \leq 1$$

である。 □

無限素点においては，この定理の類似はそのままでは成立しない。次のように修正する。まず, $C^{\infty}(U(\mathbf{R})\backslash G(\mathbf{R});\psi_{\infty})$ に属す関数のうち，緩増大条件を満たすものの全体を $C^{\infty}_{mg}(U(\mathbf{R})\backslash G(\mathbf{R});\psi_{\infty})$ で表す：

$$\begin{aligned}&C^{\infty}_{mg}(U(\mathbf{R})\backslash G(\mathbf{R});\psi_{\infty})\\ :=&\{W \in C^{\infty}(U(\mathbf{R})\backslash G(\mathbf{R});\psi_{\infty}) \mid \exists C > 0, \exists M > 0 \,\text{s.t.}\, |W(g)| \leq C||g||^M\}.\end{aligned}$$

ここで，$g=(g_{i,j})\in G(\mathbf{R})$ の高さ $||g||$ を

$$||g||:=\max\{|g_{i,j}|,|(g^{-1})_{i,j}|\mid 1\le i,j\le n\}$$

で定義する。カスプ形式は急減少, 特に緩増大関数なので，上述の写像

$$\pi_\infty\hookrightarrow C^\infty(U(\mathbf{R})\backslash G(\mathbf{R});\psi_\infty)$$

の像は, $C^\infty_{mg}(U(\mathbf{R})\backslash G(\mathbf{R});\psi_\infty)$ に属す。

定義 5. $(\mathfrak{g},K_\infty)$-加群 π_∞ に対して，

$$\mathcal{W}(\pi_\infty,\psi_\infty):=\mathrm{Hom}_{(\mathfrak{g},K_\infty)}(\pi_\infty,C^\infty_{mg}(U(\mathbf{R})\backslash G(\mathbf{R});\psi_\infty))$$

と置く。絡作用素 $\Phi\in\mathcal{W}(\pi_\infty,\psi_\infty)$ による $\xi_\infty\in\pi_\infty$ の像 $\Phi(\xi_\infty)$ を π_∞ に属する局所 Whittaker 関数と呼ぶ。 □

定理４の無限素点における類似が次の形で成立する:

定理 6 ([Shal-1974, Theorem 3.1],[Wa-1983 Theorem 8.8(1)])**.** π_∞ を任意の既約な $(\mathfrak{g},K_\infty)$-加群とする。このとき

$$\dim_{\mathbf{C}}\mathcal{W}(\pi_\infty,\psi_\infty)\le 1$$

である。 □

従って，命題３の仮定のもとでは, v が有限素点, 無限素点のいずれでも，$\dim_{\mathbf{C}}\mathcal{W}(\pi_v,\psi_v)=1$ が成立する。

注意. $p<\infty$ を有限素点とする。このとき, $\Phi\in\mathcal{W}(\pi_p,\psi_p)$ に対して，汎関数 $\lambda_\Phi:\pi_p\to\mathbf{C}$ を，$\lambda_\Phi(\xi):=\Phi(\xi)(1_n)$ によって定める。対応 $\Phi\mapsto\lambda_\Phi$ は次の同型を与える (Frobenius の相互律)：

$$\mathcal{W}(\pi_p,\psi_p)\cong\mathrm{Hom}_{U(\mathbf{Q}_p)}(\pi_p,\psi_p).$$

$v=\infty$ が無限素点ならば, $\Phi\in\mathrm{Hom}_{(\mathfrak{g},K_\infty)}(\pi_\infty,C^\infty(U(\mathbf{R})\backslash G(\mathbf{R});\psi_\infty))$ に対して, 上と同じ式によって, $\lambda_\Phi:\pi_\infty\to\mathbf{C}$ を定めることにより, 次の単射が定義される:

$$\mathrm{Hom}_{(\mathfrak{g},K_\infty)}(\pi_\infty,C^\infty(U(\mathbf{R})\backslash G(\mathbf{R});\psi_\infty))\hookrightarrow\mathrm{Hom}_{\mathfrak{u}}(\pi_\infty,\psi_\infty),\qquad \mathfrak{u}:=\mathrm{Lie}(U(\mathbf{R})).$$

以下では用いないが, この写像は全射であることも知られている ([G-W-1980, Theorem 5.2])。

用語. v が有限ないしは無限素点のとき, $\Phi\in\mathcal{W}(\pi_v,\psi_v)$ から上記のようにして定義される λ_Φ を (局所）Whittaker 汎関数という。Φ 自身も，しばしば (局所）Whittaker 汎関数と呼ばれる。

(1.3) Global multiplicity one. カスプ形式の大域 Whittaker 関数による展開 (1) および局所 Whittaker 模型の一意性（定理４及び定理６）から, 次の GL_n のカスプ保型表現についての基本的な事実がわかる。

定理 7 (重複度一定理, [Shal-1974, Theorem 5.5])**.** π を $GL_n(\mathbf{A})$ の既約許容表現とする。このとき, π からカスプ形式の空間 $\mathcal{A}_0(GL_n)$ への $(\mathfrak{g},K_\infty)\times GL_n(\mathbf{A}_{\mathrm{f}})$-準同型の空間は高々一次元である。 □

注意. 定理 7 は，$\pi_1 \cong \otimes' \pi_{1,v}$ および $\pi_2 \cong \otimes' \pi_{2,v}$ を $\mathcal{A}_0(GL_n)$ の既約な部分表現とするとき，抽象的な表現として π_1 と π_2 が同値ならば　(すなわち，すべての v について，$\pi_{1,v}$ と $\pi_{2,v}$ が抽象的な表現として同値ならば), $\mathcal{A}_0(GL_n)$ の部分空間として，$\pi_1 = \pi_2$ であることを主張している。実は，ほとんどすべての素点 v について，$\pi_{1,v}$ と $\pi_{2,v}$ が抽象的な表現として同値ならば, π_1 と π_2 が同値，したがって $\mathcal{A}_0(GL_n)$ の部分空間として $\pi_1 = \pi_2$ であることも知られている（強重複度一定理, strong multiplicity one theorem, [J-S-1981b, Theorem 4.4])。「ほとんどすべての v で $\pi_{1,v}$ と $\pi_{2,v}$ が抽象的な表現として同値ならば，π_1 と π_2 が抽象的な表現として同値」という主張は，一般の簡約可能代数群では全く期待できない（e.g. [H-PS-1984]）。重複度一定理も，一般の簡約可能代数群では不成立である（e.g. [Bl-1994], [G-G-J-2002])。

2 Cuspidal Eisenstein 級数の Whittaker 係数と保型 L 関数の関数等式

本節では, $G = GL_n$ の場合に, G の極大放物型部分群 P から誘導された cuspidal Eisenstein 級数の Whittaker 係数を計算する。まず，$P = MN$ を G の極大放物型部分群で分割 $n = n_1 + n_2$ に対応するものとする。その Levi part $M (\cong GL_{n_1} \times GL_{n_2})$ のカスプ保型表現 $\pi = (\pi_1, \pi_2)$ から Eisenstein 級数 $E(s, g; f)$ を構成する。$E(s, g; f)$ の Whittaker 係数 $E_\psi(s, g; f)$ を計算し，それは Euler 積表示を持ち, 良い有限素点 $p < \infty$ での因子は convolution L 関数 $L(s, \pi_1 \times \pi_2, \mathrm{Std}_{n_1} \boxtimes \mathrm{Std}_{n_2}^\vee)$ の p-factor(の逆数）で書けることを見る。このことと Eisenstein 級数 $E(s, g; f)$ の関数等式を組み合わせると, 粗い形の関数等式 (crude functional equation) が得られる。粗い形の関数等式には，分岐有限素点および無限素点での局所係数 (local coefficient) $C_{\psi_v}(s, \pi_v)$ の積が残っているが，$C_{\psi_v}(s, \pi_v)$ から適切に局所 L 因子，ϵ 因子を定めて，完全な関数等式を導くことができる。

(2.1) 極大放物型部分群. $n = n_1 + n_2$ となる正整数の組 (n_1, n_2) に対し, G の極大放物型部分群 $P = P_{n_1,n_2}$ を，

$$P_{n_1,n_2} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid a \in GL(n_1), d \in GL(n_2), b \in \mathrm{Mat}_{n_1,n_2} \right\}$$

で定義する。$P = P_{n_1,n_2}$ の Levi 分解 $P = P_{n_1,n_2} = M \ltimes N$ を

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid a \in GL_{n_1}, d \in GL_{n_2} \right\} \cong GL_{n_1} \times GL_{n_2},$$

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} 1_{n_1} & b \\ 0 & 1_{n_2} \end{pmatrix} \mid b \in \mathrm{Mat}_{n_1,n_2} \right\},$$

と取っておく。$P = P_{n_1,n_2}$ に対して, $P' = P_{n_2,n_1}$ とおき, P に associate した極大放物型部分群と呼び，その Levi 分解 $P' = M' \ltimes N'$ を

$$M' = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid a \in GL_{n_2}, d \in GL_{n_1} \right\}, \quad N' = \left\{ \begin{pmatrix} 1_{n_2} & b \\ 0 & 1_{n_1} \end{pmatrix} \mid b \in \mathrm{Mat}_{n_2,n_1} \right\},$$

で定める。$U_M := U \cap M$, $U_{M'} := U \cap M'$ とおけば, これらはそれぞれ M および M' の極大冪単部分群である。

$$w_0 := \begin{pmatrix} 0_{n_2,n_1} & 1_{n_2} \\ 1_{n_1} & 0_{n_1,n_2} \end{pmatrix} \in G(\mathbf{Q})$$

とおくと, $w_0 M w_0^{-1} = M'$ であることに注意しよう。各素点 v について, 自然な包含写像 $G(\mathbf{Q}) \hookrightarrow G(\mathbf{Q}_v)$ による w_0 の像も同じ記号 w_0 で表す。$P(\mathbf{A})$ の modulus quasi-character $\delta_P : P(\mathbf{A}) \to \mathbf{R}_{>0}$ は

$$\delta_P(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}) = |\det(a)|_{\mathbf{A}}^{n_2} |\det(d)|_{\mathbf{A}}^{-n_1}$$

で与えられる。また，各素点 v について，$M(\mathbf{Q}_v)$ の極大コンパクト部分群 $K_{M,v}$ を $K_{M,v} := K_v \cap M(\mathbf{Q}_v)$ で定める。

(2.2) 誘導表現の空間. (π_i, V_{π_i}) を $GL_{n_i}(\mathbf{A})$ のカスプ保型表現とし，その組 $\pi = (\pi_1, \pi_2)$ を，自然に $M(\mathbf{A})$ のカスプ保型表現とみなす。M の中心 Z_M は,

$$Z_M = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 I_{n_1} & 0 \\ 0 & z_2 I_{n_2} \end{pmatrix} \mid z_i \in \mathbf{G_m} \right\}$$

である。π は $M(\mathbf{A})$ の既約表現なので, Schur の補題から，$\pi(z) = \omega(z)\mathrm{id}_\pi$ $(z \in Z_M(\mathbf{A}))$ となるような quasi-character $\omega : Z_M(\mathbf{A}) \to \mathbf{C}^\times$ が存在する。これを π の中心指標という。中心指標 ω はユニタリとしても一般性を失わないので, 以下そのように仮定する。中心指標 ω を持つ $M(\mathbf{A})$ 上のカスプ保型形式 (resp. L^2 保型形式) の空間を $\mathcal{A}_0(M;\omega)$ (resp. $L^2(M;\omega)$) で表す ([今野])。π の表現空間を $V_\pi = V_{\pi_1} \boxtimes V_{\pi_2} \cong \otimes'_v V_{\pi_v}$ と記す。ここで，π の悪い有限素点の集合 $S_{\pi_{\mathrm{f}}}$ を

$$S_{\pi_{\mathrm{f}}} := \{p < \infty \mid V_{\pi_p}^{K_{M,p}} = \{0\}\}$$

で定義し，また，$S_\pi := S_{\pi_{\mathrm{f}}} \cup \{\infty\}$ とおく。$p \notin S_\pi$ に対しては，$\dim_{\mathbf{C}} V_{\pi_p}^{K_{M,p}} = 1$ であり，$\xi_p^\circ \in V_{\pi_p}^{K_{M,p}}$ なるベクトル $\xi_p^\circ (\neq 0)$ が選択されていることに注意する。さらに同型 $V_\pi \cong \otimes' V_{\pi_v}$ も固定しておく。V_π から $M(\mathbf{A})$ 上のカスプ形式の空間 $\mathcal{A}_0(M;\omega)$ への埋め込みは，定理 7 によって定数倍を除いてただ一つだが, こちらも一つ固定して

$$V_\pi \ni \xi \mapsto [\xi]_{aut} \in \mathcal{A}_0(M;\omega)$$

で記す。この写像の像を $[V_\pi]_{aut} (\subset \mathcal{A}_0(M;\omega))$ で表す。$[V_\pi]_{aut}$ の $L^2(M;\omega)$ の中での閉包を $\overline{[V_\pi]}_{aut}$ と書き，さらに $\overline{[V_\pi]}_{aut}$ の smooth vector の全体を $[V_\pi]_{aut}^\infty$ で，表すことにする。また，$[V_\pi]_{aut}^\infty$ を抽象的な $G(\mathbf{A})$ の表現と見るときには，$V_\pi^\infty \cong V_{\pi_\infty}^\infty \otimes (\otimes_{p<\infty} V_{\pi_p})$ で表し，同

型写像 $V_\pi^\infty \cong [V_\pi]_{aut}^\infty$ もまた $[\ ]_{aut}$ で表す。$s \in \mathbf{C}$ に対して, 次の大域的な放物型誘導表現を考える：

$$
\begin{aligned}
&I_{P(\mathbf{A})}^{G(\mathbf{A})}(s,\pi) \\
&:= \left\{ f : G(\mathbf{A}) \overset{C^\infty}{\to} \mathbf{C} \;\middle|\; \begin{array}{cc} f(ng) = f(g), & \forall (n,g) \in N(\mathbf{A}) \times G(\mathbf{A}) \\ [M(\mathbf{A}) \ni m \mapsto f(mg) \in \mathbf{C}] \in [V_\pi]_{aut}^\infty \otimes \delta_P^{1/2+s/n}, & \forall g \in G(\mathbf{A}) \end{array} \right\}.
\end{aligned}
$$

$f \in I_{P(\mathbf{A})}^{G(\mathbf{A})}(s,\pi)$ に対して, $\widetilde{f} : G(\mathbf{A}) \to V_\pi^\infty$ を，関係式

$$
\delta_P^{1/2+s/n}(m)[\widetilde{f}(g)]_{aut}(m) = f(mg), \qquad \forall (m,g) \in M(\mathbf{A}) \times G(\mathbf{A})
$$

を満たすように定めると，$\widetilde{f}$ は，次の空間

$$
\mathrm{Ind}_{P(\mathbf{A})}^{G(\mathbf{A})}(\pi \otimes \delta_P^{1/2+s/n}) := \left\{ \widetilde{f} : G(\mathbf{A}) \overset{C^\infty}{\to} V_\pi^\infty \;\middle|\; \begin{array}{c} \widetilde{f}(mng) = \pi(m)\delta_P(m)^{1/2+s/n}\widetilde{f}(g) \\ \forall (m,n,g) \in M(\mathbf{A}) \times N(\mathbf{A}) \times G(\mathbf{A}) \end{array} \right\}
$$

に属す (induction in stages)。この対応は，$I_{P(\mathbf{A})}^{G(\mathbf{A})}(s,\pi)$ と $\mathrm{Ind}_{P(\mathbf{A})}^{G(\mathbf{A})}(\pi \otimes \delta_P^{1/2+s/n})$ との間に $G(\mathbf{A})$ 同変な同型を与える。次に，局所的な誘導表現の空間 $I_{P(\mathbf{Q}_v)}^{G(\mathbf{Q}_v)}(s,\pi_v)$ を

$$
\begin{aligned}
&I_{P(\mathbf{Q}_v)}^{G(\mathbf{Q}_v)}(s,\pi_v) \equiv \mathrm{Ind}_{P(\mathbf{Q}_v)}^{G(\mathbf{Q}_v)}(\pi_v \otimes \delta_P^{1/2+s/n}) \\
&:= \left\{ \widetilde{f} : G_v \overset{C^\infty}{\to} V_{\pi_v} \;\middle|\; \begin{array}{c} \widetilde{f}(mng) = \delta_P^{1/2+s/n}(m)\pi_v(m)\widetilde{f}(g) \\ \forall (m,n,g) \in M_v \times N_v \times G_v \end{array} \right\}
\end{aligned}
$$

で定義する（正確には，$v = \infty$ の時には，V_{π_∞} を $V_{\pi_\infty}^\infty$ で置き換える）。すると，同型 $I_{P(\mathbf{A})}^{G(\mathbf{A})}(s,\pi) \cong \otimes_v' I_{P(\mathbf{Q}_v)}^{G(\mathbf{Q}_v)}(s,\pi_v)$ が成立する。

(2.3) Eisenstein 級数. 関数 $f : \mathbf{C} \times G(\mathbf{A}) \to \mathbf{C}$ が，３条件

- $f(s,g) \in I_{P(\mathbf{A})}^{G(\mathbf{A})}(s,\pi)$ $\qquad \forall s \in \mathbf{C}$,
- $f(s_1,mk) = f(s_2,mk)$ $\qquad \forall s_1, \forall s_2 \in \mathbf{C}, \forall (m,k) \in M(\mathbf{A})^1 \times K_{\mathbf{A}}$,
- $f(s,g)$ は, 右 K_∞-有限である $\qquad \forall s \in \mathbf{C}$,

を満たすとき，f を誘導表現の族 $\{I_{P(\mathbf{A})}^{G(\mathbf{A})}(s,\pi)\}_{s \in \mathbf{C}}$ の平坦な切断 (flat section) と呼ぶことにする。但し，ここで

$$
M(\mathbf{A})^1 := \left\{ \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \in M(\mathbf{A}) \middle| |\det(m_1)|_{\mathbf{A}} = |\det(m_2)|_{\mathbf{A}} = 1 \right\}
$$

と置いた。族 $\{I_{P(\mathbf{A})}^{G(\mathbf{A})}(s,\pi)\}_{s \in \mathbf{C}}$ の平坦な切断 $f(s,g)$ が与えられたとき，Eisenstein 級数が次式で定義される：

$$
E(s,g;f) := \sum_{\gamma \in P(\mathbf{Q}) \backslash G(\mathbf{Q})} f(s,\gamma g), \qquad (s,g) \in \mathbf{C} \times G(\mathbf{A}).
$$

$E(s,g;f)$ は $\mathrm{Re}(s)>n/2$ で絶対収束して, 全 s-平面上に有理型に解析接続されて極以外では，$G(\mathbf{A})$ 上の保型形式を定める。大域的な絡作用素

$$M(s,\pi): I_{P(\mathbf{A})}^{G(\mathbf{A})}(s,\pi) \to I_{P'(\mathbf{A})}^{G(\mathbf{A})}(-s,w_0(\pi))$$

が

$$[M(s,\pi)f](g) := \int_{N'(\mathbf{A})} f(s, w_0^{-1}n'g)dn'$$

で定義される。ここで, $w_0(\pi)$ は, π の表現空間 V_π に, $w_0(\pi)(m') := \pi(w_0^{-1}m'w_0)$ で作用させて得られる，$M'(\mathbf{A})$ のカスプ保型表現である。この積分は，$\mathrm{Re}(s)>n/2$ で絶対収束し，全 s-平面に有理型に解析接続される。このとき，$f:\mathbf{C}\times G(\mathbf{A})\to\mathbf{C}$ を $\{I_{P(\mathbf{A})}^{G(\mathbf{A})}(s,\pi)\}_{s\in\mathbf{C}}$ の平坦な切断とするとき，次の関数等式が成立する：

$$E(s,g;f) = E(-s,g;M(s,\pi)f) \tag{2}$$

この関数等式の右辺の定義は精しくは次の通りである。まず，$[M(s,\pi)f](g)$ は解析接続によって, 族 $\{I_{P'(\mathbf{A})}^{G(\mathbf{A})}(-s,w_0(\pi))\}_{s\in\mathbf{C}}$ の有理型切断を定める。そうすると, 和

$$\sum_{\gamma\in P'(\mathbf{Q})\backslash G(\mathbf{Q})} [M(s,\pi)f](\gamma g)$$

は $\mathrm{Re}(s)<-n/2$ で絶対収束するが，これを再び全 s-平面上の有理型関数として解析接続したものが右辺である。素点 v に対して，局所的な絡作用素 $A(s,\pi_v): I_{P(\mathbf{Q}_v)}^{G(\mathbf{Q}_v)}(s,\pi_v) \to I_{P'(\mathbf{Q}_v)}^{G(\mathbf{Q}_v)}(-s,w_0(\pi_v))$ を

$$[A(s,\pi_v)f_v](g) := \int_{N'(\mathbf{Q}_v)} f_v(s,w_0^{-1}n'g)dn'$$

で定義すると, 同型

$$I_{P(\mathbf{A})}^{G(\mathbf{A})}(s,\pi) \cong \otimes_v' I_{P(\mathbf{Q}_v)}^{G(\mathbf{Q}_v)}(s,\pi_v) \quad \text{および} \quad I_{P'(\mathbf{A})}^{G(\mathbf{A})}(-s,w_0(\pi)) \cong \otimes_v' I_{P'(\mathbf{Q}_v)}^{G(\mathbf{Q}_v)}(-s,w_0(\pi_v))$$

を通じて

$$M(s,\pi) = \otimes_v A(s,\pi_v)$$

が成立する。

注意. この種の Eisenstein 級数 (cuspidal Eisenstein 級数) は，Siegel 保型形式の場合には, H. Klingen ([Kl-1967]) によって定義された。Langlands([L-1966], [L-1976]) は, 一般の簡約可能代数群に対して，同様の Eisenstein 級数を定義して，その一般論を展開した。

(2.4) Eisenstein 級数の Whittaker 係数. さて，$E(s,g;f)$ の Whittaker 係数 $E_\psi(s,g;f)$ の計算をはじめる。まず, 定義によって,

$$\begin{aligned} E_\psi(s,g;f) &= \int_{U(\mathbf{Q})\backslash U(\mathbf{A})} E(s,ug;f)\psi_U(u)^{-1}du \\ &= \int_{U(\mathbf{Q})\backslash U(\mathbf{A})} \sum_{\gamma\in P(\mathbf{Q})\backslash G(\mathbf{Q})} f(s,\gamma ug)\psi_U(u)^{-1}du \end{aligned}$$

である。$P(\mathbf{Q})\backslash G(\mathbf{Q})$ にわたる和を $P(\mathbf{Q})\backslash P(\mathbf{Q})w_0^{-1}N'(\mathbf{Q})$ と $P(\mathbf{Q})\backslash(G(\mathbf{Q})\backslash P(\mathbf{Q})w_0^{-1}N'(\mathbf{Q}))$ の２つに分けると，後者は $[M(\mathbf{A})\ni m\mapsto f(s,mk)\in\mathbf{C}]$ $(k\in K(\mathbf{A}))$ が $M(\mathbf{A})$ 上のカスプ形式の空間に属すことなどから，$U(\mathbf{Q})\backslash U(\mathbf{A})$ 上で積分したのちにゼロとなることがわかる。したがって，

$$\begin{aligned}E_\psi(s,g;f)&=\int_{U(\mathbf{Q})\backslash U(\mathbf{A})}\sum_{n\in N'(\mathbf{Q})}f(s,w_0^{-1}nug)\psi_U(u)^{-1}du\\&=\int_{N'(\mathbf{A})}dn'\ \psi_U(n')^{-1}\int_{U_{M(\mathbf{Q})}\backslash U_{M(\mathbf{A})}}du\ \psi_U(u)^{-1}f(s,uw_0^{-1}n'g)\end{aligned}$$

と変形できる。これをさらに計算するために，π の大域的な Whittaker 汎関数 $\lambda_M:[V_\pi]_{aut}\to\mathbf{C}$ を

$$\lambda_M(\varphi):=\int_{U_M(\mathbf{Q})\backslash U_M(\mathbf{A})}\varphi(u)\psi_U(u)^{-1}du$$

で定義する。ここで，局所 Whittaker 模型の一意性 (定理４，定理６）から，π_v の局所 Whittaker 汎関数 $\lambda_M^{(v)}:V_{\pi_v}\to\mathbf{C}$ を

(3) $$\lambda_M([\xi]_{aut})=\prod_v\lambda_M^{(v)}(\xi_v),\qquad\forall\xi=\otimes\xi_v\in V_\pi\cong\otimes'V_{\pi_v},$$

(4) $$\lambda_M^{(p)}(\xi_p^\circ)=1,\qquad\forall p\notin S_\pi$$

が成立するようにとることができる。以下，平坦な切断 $f(s,g)$ も分解可能 (decomposable)，すなわち，

$$f(s,mg)=\delta_P^{1/2+s/n}(m)[\widetilde{f}(s,g)]_{aut}(m),\quad\widetilde{f}(s,g)=\prod_v\widetilde{f}_v(s,g_v)$$

という形であるとする。すると，$E_\psi(s,g;f)$ は

$$\begin{aligned}&\int_{N'(\mathbf{A})}dn'\psi_U(n')^{-1}\int_{U_M(\mathbf{Q})\backslash U_M(\mathbf{A})}du\ \psi_U(u)^{-1}[\widetilde{f}(s,w_0^{-1}n'g)]_{aut}(u)\\=&\int_{N'(\mathbf{A})}dn'\ \psi_U(n')^{-1}\lambda_M([\widetilde{f}(s,w_0^{-1}n'g)]_{aut})\\=&\prod_v\int_{N'(\mathbf{Q}_v)}dn'_v\ \psi_U(n'_v)^{-1}\lambda_M^{(v)}(\widetilde{f}_v(s,w_0^{-1}n'_vg_v))\end{aligned}$$

と局所的な積分の積に分解する。ここで，$I_{P(\mathbf{Q}_v)}^{G(\mathbf{Q}_v)}(s,\pi_v)$ 上の Whittaker 汎関数

$$\lambda_G^{(v)}:I_{P(\mathbf{Q}_v)}^{G(\mathbf{Q}_v)}(s,\pi_v)\to\mathbf{C}$$

を

(5) $$\lambda_G^{(v)}(\widetilde{f}_v):=\int_{N'(\mathbf{Q}_v)}dn'_v\ \psi_U(n'_v)^{-1}\lambda_M^{(v)}(\widetilde{f}_v(w_0^{-1}n'_v))$$

で定めると，上の式で $g=e$ としたものは，

(6) $$E_\psi(s,e;f)=\prod_v\lambda_G^{(v)}(\widetilde{f}_v(s,\cdot))$$

と書ける。

注意. $I_{P(\mathbf{A})}^{G(\mathbf{A})}(s,\pi) \ni f \mapsto E_\psi(s,e;f) \in \mathbf{C}_{\psi_U}$ は $N(\mathbf{A})$ 同変である。$\mathcal{W}(I_{P(\mathbf{Q}_p)}^{G(\mathbf{Q}_p)}(s,\pi_p),\psi_p) = \mathbf{C}\lambda_G^{(p)}$ であること ([Ro-1973]) を考慮に入れると, Whittaker 係数が (7) のように Euler 積に分解することは自然である。

(2.5) 不分岐有限素点における計算. 一般線型群 GL_r の双対群 $GL_r(\mathbf{C})$ の複素解析的な有限次元既約表現 Std_r および $\mathrm{Std}_r^\vee$ を

$$\mathrm{Std}_r : GL_r(\mathbf{C}) \ni A \mapsto A \in GL_r(\mathbf{C}), \qquad \mathrm{Std}_r^\vee : GL_r(\mathbf{C}) \ni A \mapsto {}^tA^{-1} \in GL_r(\mathbf{C})$$

で定める。

命題 8. $p \notin S_\pi$ とし, $\pi_{i,p}$ の *Satake parameter* を $A_{i,p} \in GL_{n_i}(\mathbf{C})$ $(i=1,2)$ とする。また, $I_{P(\mathbf{Q}_p)}^{G(\mathbf{Q}_p)}(s,\pi_p)$ の K_p 不変ベクトル $\widetilde{f}_p^\circ \in I(s,\pi_p)$ を $\widetilde{f}_p^\circ(k) = \xi_p^\circ$ $(\forall k \in K_p)$ で定める。$\xi_p^\circ \in \pi_p$ は, 制限テンソル積を定義するときに固定した π_p の $K_{M,p}$ 不変ベクトルである。このとき, 次が成立する。

$$\begin{aligned}\lambda_G^{(p)}(\widetilde{f}_p^\circ(s,\cdot)) &= L(1+s,\pi_p,\mathrm{Std}_{n_1}\otimes\mathrm{Std}_{n_2}^\vee)^{-1}\\ &= \det[1_{n_1n_2} - (A_{1,p}\otimes {}^tA_{2,p}^{-1})\cdot p^{-(s+1)}].\end{aligned}$$

□

Proof. 以下, この証明中では, $G = G(\mathbf{Q}_p)$, $K = K_p$ など略記する。まず, 不分岐な quasi-character $\chi : T/T\cap K \to \mathbf{C}^\times$ に対して, $G = GL_n(\mathbf{Q}_p)$ の不分岐主系列表現 $I_B^G(\chi)$ を

$$\begin{aligned}&I_B^G(\chi) \equiv \mathrm{Ind}_B^G(\chi\cdot\delta_B^{1/2})\\ &:= \left\{\phi_G : G \overset{C^\infty}{\to} \mathbf{C} \mid \phi_G(utg) = (\chi\cdot\delta_B^{1/2})(t)\phi_G(g), \quad \forall(u,t,g)\in U\times T\times G\right\}\end{aligned}$$

で定義する。ここで, $\delta_B : B/U \cong T \to \mathbf{C}^\times$ は B の modulus quasi-character で

$$\delta_B(t) := \prod_{i=1}^n |t_i|^{n+1-2i}, \qquad t = \mathrm{diag}(t_1,t_2,\cdots,t_n) \in T$$

によって与えられる。$I_B^G(\chi)$ の K 不変ベクトル $\phi_G^\circ \in I_B^G(\chi)$ を $\phi_G^\circ(k) = 1$ $(\forall k \in K)$ で正規化しておく。同様に, $M = GL_{n_1}(\mathbf{Q}_p)\times GL_{n_2}(\mathbf{Q}_p)$ の不分岐主系列表現 $I_{B_M}^M(\chi)$ を,

$$\begin{aligned}&I_{B_M}^M(\chi) \equiv \mathrm{Ind}_{B_M}^M(\chi\cdot\delta_{B_M}^{1/2})\\ &:= \left\{\phi_M : M \overset{C^\infty}{\to} \mathbf{C} \mid \phi_M(utm) = (\chi\cdot\delta_{B_M}^{1/2})(t)\phi_M(m), \quad \forall(u,t,m)\in U_M\times T\times M\right\}\end{aligned}$$

で定義する。ここで, $B_M := B\cap M$, $U_M := U\cap M$ で, $\delta_{B_M} : B_M/U_M \cong T \to \mathbf{C}^\times$ は B_M の modulus quasi-character であって, 具体的には

$$\delta_{B_M}(t) = \prod_{i=1}^{n_1}|t_i|^{n_1+1-2i}\prod_{j=1}^{n_2}|t_{n_1+j}|^{n_2+1-2j}, \qquad t = \mathrm{diag}(t_1,t_2,\cdots,t_n)\in T$$

で与えられる。 先と同様に, $I_{B_M}^M(\chi)$ の K_M 不変ベクトル $\phi_M^\circ \in I_{B_M}^M(\chi)$ を $\phi_M^\circ(k') = 1$ $(\forall k' \in K_M)$ で正規化する。いま, 適当に χ を選べば, π_p を M の不分岐主系列表現

$I_{B_M}^M(\chi)$ の部分表現として埋め込むことができる。π_p は局所 Whittaker 模型を持つ, すなわち $\dim_{\mathbf{C}} \mathcal{W}(\pi_p, \psi_p) = 1$ であることから, 実は $\pi_p \cong I_{B_M}^M(\chi)$ であることもわかる ([B-M-1994], [Li-1992], [Re-1993])。同型写像 $\pi_p \cong I_{B_M}^M(\chi)$ を，ξ_p° と ϕ_M° が対応するように固定する (注：以下の議論においては，同型である必要はなく，単に埋め込み $\pi_p \hookrightarrow I_{B_M}^M(\chi)$ があれば十分)。この同一視のもとで，(4) のように正規化された Whittaker 汎関数 $\lambda_M : I_{B_M}^M(\chi) \to \mathbf{C}$ は

$$\lambda_M(\phi_M) = C_M^{-1} \int_{U_M} du\ \phi_M(w_{\ell,M}^{-1} u)\psi_U(u)^{-1}$$

で与えられる。ただし，正規化から生ずる定数 C_M は

$$C_M := \int_{U_M} du\ \phi_M^\circ(w_{\ell,M}^{-1} u)\psi_U(u)^{-1}$$

である。ここで，

$$w_{\ell,M} := \begin{pmatrix} J_{n_1} & 0_{n_1,n_2} \\ 0_{n_2,n_1} & J_{n_2} \end{pmatrix}, \qquad J_r := \begin{pmatrix} & & & & 1 \\ & & & 1 & \\ & & \iddots & & \\ & 1 & & & \\ 1 & & & & \end{pmatrix}$$

と置いた。同値な表現 $I_P^G(s, I_{B_M}^M(\chi))$ と $I_B^G(\chi\cdot\delta_P^{s/n}))$ の K 不変ベクトル $f^\circ(s,\cdot) \in I_P^G(s, I_{B_M}^M(\chi))$ 及び $\phi_G^\circ \in I_B^G(\chi \cdot \delta_P^{s/n})$ を

$$f^\circ(s,k) = \phi_M^\circ\ (\forall k \in K), \qquad \phi_G^\circ(k) = 1\ (\forall k \in K)$$

で定める。同型写像

$$I_P^G(s,\pi_p) \cong I_P^G(s, I_{B_M}^M(\chi)) \cong I_B^G(\chi \cdot \delta_P^{s/n})$$

を次のように固定する。一つ目の同型は，先の同一視 $\pi_p \cong I_{B_M}^M(\chi)$ によって固定する。また, 二つ目の同型は，$f(s,\cdot) \in I_P^G(s, I_{B_M}^M(\chi))$ に対して，$\phi_G \in I_B^G(\chi \cdot \delta_P^{s/n}))$ を

$$\phi_G(mg) = f(s,g)(m), \qquad \forall (m,g) \in M \times G$$

によって対応させる (induction in stages)。すると，各々の K 不変ベクトル $\widetilde{f}^\circ(s,\cdot)$, $f^\circ(s,\cdot)$, ϕ_G° が対応していることがわかる。したがって，

$$\begin{aligned}\lambda_G(\widetilde{f}^\circ(s,\cdot)) =& C_M^{-1} \times \int_{N'} dn'\ \psi_U(n')^{-1} \int_{U_M} du\ \psi_U(u)^{-1} f^\circ(s, w_0^{-1}n')(w_{\ell,M}^{-1}u) \\ =& C_M^{-1} \times \int_{N'} dn'\ \psi_U(n')^{-1} \int_{U_M} du\ \psi_U(u)^{-1} \phi_G^\circ(w_{\ell,M}^{-1} u w_0^{-1} n') \\ =& C_M^{-1} \times \int_U du\ \psi_U(u)^{-1} \phi_G^\circ(w_\ell^{-1} u)\end{aligned}$$

となる。ただし, $w_\ell := J_n \in G$ は, G の Weyl 群 $W = W(G,T) \cong \mathfrak{S}_n$ の，Borel 部分群 B の定める正ルート系に関する，最長元である ($w_\ell = w_0 w_{\ell,M}$ に注意)。ここで, 上記の積分

は, 局所 Whittaker 関数の H. Jacquet による積分表示 (Jacquet 積分) の単位元での値であることに着目しよう。すなわち，$\phi_G \in I_B^G(\chi)$ に対して, Jacquet 積分を

$$W(g;\phi_G) := \int_U du\ \phi_G(w_0^{-1}ug)\psi_U(u)^{-1}$$

で定義すると, $\phi_G \mapsto W(g;\phi_G)$ は局所 Whittaker 汎関数の空間 $\mathcal{W}(I_B^G(\chi),\psi)$ に属す。この積分の値を $\phi_G = \phi_G^\circ$, $g = e$ に対して求めれば良いが，それは次の様になる。

命題 9 (Casselman-Shalika [C-S-1980, Theorem 5.4])**.** *U 上の Haar 測度を* $\mathrm{vol}(U \cap K) = 1$ *と正規化する。また, quasi-character* $\chi_i : \mathbf{Q}_p^\times \to \mathbf{C}^\times$ *を*

$$\chi(t) = \prod_{i=1}^{n} \chi_i(t_i), \qquad t = \mathrm{diag}(t_1, t_2, \cdots, t_n) \in T$$

で定める。このとき,

$$W(e;\phi_G^\circ) = \prod_{1\le i<j\le n} \left(1 - (\chi_i \cdot \chi_j^{-1})(p)p^{-1}\right)$$

である。 □

この命題 9 を用いて計算してやれば

$$C_M = \prod_{1\le i<j\le n_1} (1 - (\chi_i \cdot \chi_j^{-1})(p)p^{-1}) \prod_{n_1+1\le i<j\le n} (1 - (\chi_i \cdot \chi_j^{-1})(p)p^{-1}),$$

及び

$$\begin{aligned}
&\int_U du\ \psi(u)^{-1}\phi_G^\circ(w_\ell^{-1}u) \\
&= \prod_{1\le i<j\le n_1} (1 - (\chi_i \cdot \chi_j^{-1})(p)p^{-1}) \prod_{n_1+1\le i<j\le n} (1 - (\chi_i \cdot \chi_j^{-1})(p)p^{-1}) \\
&\quad \times \prod_{1\le i\le n_1} \prod_{n_1+1\le j\le n} (1 - (\chi_i \cdot \chi_j^{-1})(p)p^{-(s+1)})
\end{aligned}$$

を得る。ここで，

$$(\chi \cdot \delta_P^{s/n})(t) = \prod_{1\le i\le n_1} \chi_i(t_i)|t_i|^{n_2 s/n} \prod_{n_1+1\le i\le n} \chi_i(t_i)|t_i|^{-n_1 s/n}, \quad t = \mathrm{diag}(t_1, t_2, \cdots, t_n) \in T$$

であることを用いた。あとは，π_1 および π_2 の Satake parameter$A_{1,p}$ および $A_{2,p}$ が，それぞれ

$$A_{1,p} = \mathrm{diag}(\chi_1(p), \chi_2(p), \cdots, \chi_{n_1}(p)), \quad A_{2,p} = \mathrm{diag}(\chi_{n_1+1}(p), \chi_{n_1+2}(p), \cdots, \chi_n(p))$$

で与えられることに注意してやれば, 命題 8 の証明が完了する。 □

注意. G を p-進体 F 上で定義された準分裂簡約可能代数群で, 適当な不分岐拡大 E/F で分裂するようなものとする（このとき，簡約可能代数群 G は不分岐であるという)。W. Casselman と J. A. Shalika[C-S-1980] は，不分岐な簡約可能代数群 G に対して，不分岐主系列表現に対する Jacquet 積分の値を, 極大分裂トーラス上 T 上で計算して，不分岐主系

列表現に属する Whittaker 関数の明示公式を得た (いわゆる (Kato-)Casselman-Shalika 公式)。この明示公式は，Rankin-Selberg method における不分岐素点での局所ゼータ積分の計算に用いられる ([石川, 1.1.6, 3.2.4])。

(2.6) Crude functional equation. Eisenstein 級数の関数等式 (2) で両辺の Whittaker 係数を取れば,

$$E_\psi(s,e;f) = E_\psi(-s,e;M(s,\pi)f) \tag{7}$$

となる。この式の左辺を命題 8 を用いて計算すると,

$$E_\psi(s,e;f) = \Big\{\prod_{v\in S_\pi}\lambda_G^{(v)}(\widetilde{f}_v(s,\cdot))\Big\}\times L^{S_\pi}(1+s,\pi,\mathrm{Std}_{n_1}\boxtimes\mathrm{Std}_{n_2}^\vee)^{-1} \tag{8}$$

となる。ここで，部分 L 関数 $L^{S_\pi}(s,\pi,\mathrm{Std}_{n_1}\boxtimes\mathrm{Std}_{n_2}^\vee)$ は

$$\begin{aligned} L^{S_\pi}(s,\pi,\mathrm{Std}_{n_1}\boxtimes\mathrm{Std}_{n_2}^\vee) &:= \prod_{p\notin S_\pi} L(s,\pi_p,\mathrm{Std}_{n_1}\boxtimes\mathrm{Std}_{n_2}^\vee)\\ &= \prod_{p\notin S_\pi}\det\big(1_{n_1n_2}-(A_{1,p}\otimes {}^tA_{2,p}^{-1})\cdot p^{-s}\big)^{-1} \end{aligned} \tag{9}$$

によって定義される。$L^{S_\pi}(1+s,\pi,\mathrm{Std}_{n_1}\boxtimes\mathrm{Std}_{n_2}^\vee)^{-1}$ が全 s-平面に有理型に解析接続されることは，定数項の計算によってもわかるが（[L-1971]，[都築, §3]），$v\in S_\pi$ に対して，$\widetilde{f}_v(s,\cdot)$ を $\prod_{v\in S_\pi}\lambda_G^{(v)}(\widetilde{f}_v(s,\cdot))\neq 0$ となるように取れることが知られているので，(8) からも従う。次に，(7) の右辺を考える。[都築, §3] で解説されたように，$p\notin S_\pi$ に対して

$$A(s,\pi_p)\widetilde{f}_p^\circ(s,\cdot) = \frac{L(s,\pi_p,\mathrm{Std}_{n_1}\boxtimes\mathrm{Std}_{n_2}^\vee)}{L(1+s,\pi_p,\mathrm{Std}_{n_1}\boxtimes\mathrm{Std}_{n_2}^\vee)}\widetilde{f}_p^{\circ,\vee}(-s,\cdot) \tag{10}$$

である。ここで，$\widetilde{f}_p^{\circ,\vee}(-s,\cdot)$ は $I_{P'(\mathbf{Q}_p)}^{G(\mathbf{Q}_p)}(-s,w_0(\pi_p))$ の，$\widetilde{f}_p^{\circ,\vee}(-s,k)=\xi_p^\circ$ $(\forall k\in K_p)$ と正規化された K_p 不変ベクトルである。したがって，やはり命題 8 によって

$$\begin{aligned} &E_\psi(-s,e;M(s,\pi)f)\\ =&\Big\{\prod_{v\in S_\pi}\lambda'^{(v)}_G(A(s,\pi_v)\widetilde{f}_v(s,\cdot))\Big\}\frac{L^{S_\pi}(s,\pi,\mathrm{Std}_{n_1}\boxtimes\mathrm{Std}_{n_2}^\vee)}{L^{S_\pi}(1+s,\pi,\mathrm{Std}_{n_1}\times\mathrm{Std}_{n_2}^\vee)}\\ &\times L^{S_\pi}(1-s,\pi,\mathrm{Std}_{n_1}^\vee\boxtimes\mathrm{Std}_{n_2})^{-1} \end{aligned} \tag{11}$$

を得る。ここで，$\lambda'^{(v)}_G : I_{P'(\mathbf{Q}_v)}^{G(\mathbf{Q}_v)}(-s,w_0(\pi_v))\to\mathbf{C}$ は,

$$\lambda'^{(v)}_G(\widetilde{f}) := \int_{N(\mathbf{Q}_v)} dn\ \psi(n)^{-1}\lambda_{M'}^{(v)}(\widetilde{f}(w_0n)) \tag{12}$$

で与えられる Whittaker 汎関数である。(8) と (11) が等しいから，次の粗い形の関数等式 (crude functional equation) を得る:

$$\begin{aligned} &L^{S_\pi}(s,\pi,\mathrm{Std}_{n_1}\boxtimes\mathrm{Std}_{n_2}^\vee)\\ =&\prod_{v\in S_\pi}\frac{\lambda_G^{(v)}(\widetilde{f}_v(s,\cdot))}{\lambda'^{(v)}_G(A(s,\pi_v)\widetilde{f}_v(s,\cdot))}\times L^{S_\pi}(1-s,\pi,\mathrm{Std}_{n_1}^\vee\boxtimes\mathrm{Std}_{n_2}). \end{aligned} \tag{13}$$

(2.7) 局所係数 (local coefficient) と完全な関数等式. crude functional equation (13) から，完全な関数等式を得るには，各 $v \in S_\pi$ について

$$\frac{\lambda_G^{(v)}(\widetilde{f}_v(s,\cdot))}{\lambda'^{(v)}_G(A(s,\pi_v)\widetilde{f}_v(s,\cdot))} \tag{14}$$

を L 因子, ϵ 因子に結びつける必要がある。まず (14) が, $\widetilde{f}_v(s,\cdot)$ の選択に無関係であることに注意しよう。実際，$\lambda_G^{(v)} : I_{P(\mathbf{Q}_v)}^{G(\mathbf{Q}_v)}(s,\pi_v) \to \mathbf{C}$ 及び $\lambda'^{(v)}_G \circ A(s,\pi_v) : I_{P(\mathbf{Q}_v)}^{G(\mathbf{Q}_v)}(s,\pi_v) \to \mathbf{C}$ は，ともに Whittaker 汎関数である。一方で，[Ro-1973] より，誘導表現 $I_{P(\mathbf{Q}_v)}^{G(\mathbf{Q}_v)}(s,\pi_v)$ の Whittaker 汎関数は一意なので，s の有理型関数 $C_{\psi_v}(s,\pi_v)$ で

$$\lambda_G^{(v)} = C_{\psi_v}(s,\pi_v) \times \lambda'^{(v)}_G \circ A(s,\pi_v)$$

を満たすものが存在する事がわかる。$C_{\psi_v}(s,\pi_v)$ を局所係数 (local coefficient) と呼ぶ。関数等式が成立するためには，$v \in S_\pi$ において次の等式

$$C_{\psi_v}(s,\pi_v) = \epsilon(s,\pi_v,\mathrm{Std}_{n_1}\boxtimes\mathrm{Std}_{n_2}^\vee,\psi_v) \times \frac{L(1-s,\pi_v,\mathrm{Std}_{n_1}^\vee\boxtimes\mathrm{Std}_{n_2})}{L(s,\pi_v,\mathrm{Std}_{n_1}\boxtimes\mathrm{Std}_{n_2}^\vee)} \tag{15}$$

が成立すべきである。

(i) $v=\infty$ の場合. (15) の右辺に現れる L 因子, ϵ 因子を，$\pi_\infty = (\pi_{1,\infty},\pi_{2,\infty})$ の Langlands パラメータ

$$\phi : W_{\mathbf{R}} \to {}^L M^\circ \cong GL(n_1,\mathbf{C}) \times GL(n_2,\mathbf{C})$$

を通じて定めると，等式 (15) が成立することが，一般的な状況で証明されている ([Shahidi-1985])。この意味で，Langlands-Shahidi method においては，無限素点は「良い素点」であり, これで話はすんでいる。

(ii) $v=p\in S_{\pi_{\mathrm{f}}}$ で, π_p が tempered な場合. まず，$C_{\psi_p}(s,\pi_p)\in\mathbf{C}(p^{-s})$, $C_{\psi_p}(s,\pi_p)\neq 0$ であることが示される。$A\in\mathbf{C}^\times$, $f\in\mathbf{Z}$, $P(X)\in\mathbf{C}[X]$, $Q(X)\in\mathbf{C}[X]$ が

$$\begin{aligned} C_{\psi_p}(s,\pi_p) &= Ap^{-fs}\times\frac{P(p^{-s})}{Q(p^{-(1-s)})}, \\ \gcd(P(X), X^{\deg(Q)}Q(p^{-1}X^{-1})) &= 1, \quad P(0)=Q(0)=1 \end{aligned}$$

を満たすように一意に定まる（つまり，$C_{\psi_p}(s,\pi_p)$ を既約分数の形に書く)。そこで，

$$\begin{aligned} L(s,\pi_p,\mathrm{Std}_{n_1}\boxtimes\mathrm{Std}_{n_2}^\vee) &:= P(p^{-s})^{-1} \\ L(s,\pi_p,\mathrm{Std}_{n_1}^\vee\boxtimes\mathrm{Std}_{n_2}) &:= Q(p^{-s})^{-1} \\ \epsilon(s,\pi_p,\mathrm{Std}_{n_1}\boxtimes\mathrm{Std}_{n_2}^\vee,\psi_p) &:= Ap^{-fs} \end{aligned}$$

で定めてやると, 等式 (15) が成立する。

(iii) $v=p\in S_{\pi_{\mathrm{f}}}$ で, π_p が non-tempered な場合. この場合は，少し複雑である。M の既約許容表現の Langlands 分類によって，π_p は M の（一般）主系列表現の部分表現として実現する ([石川, Appendix])。次に，（一般）主系列表現で誘導される M の放物型部分群 Q の Levi 部分群 M_Q の tempered 表現を σ とするとき，$C_{\psi_p}(s,\pi_p)$ が σ の局所係数の積に分解されることが示される。ここに現れた Levi 部分群 M_Q の tempered 表現 σ の局所係

数から (ii) のやり方で，Levi 部分群の tempered 表現の L 因子, ϵ 因子を定めて，それらの積として，$L(s,\pi_p,\mathrm{Std}_{n_1}\boxtimes\mathrm{Std}_{n_2}^\vee)$，$L(s,\pi_p,\mathrm{Std}_{n_1}^\vee\boxtimes\mathrm{Std}_{n_2})$ および $\epsilon(s,\pi_p,\mathrm{Std}_{n_1}\boxtimes\mathrm{Std}_{n_2}^\vee,\psi_p)$ を定める（詳しくは，[Shah-1990], [Ki-2004], [Shah-2006] を参照)。定義の仕方から，等式 (15) が成立している。

このようにして，$v\in S_\pi$ に対して, L 因子および ϵ 因子を (15) を満たすように定義してやることができたので，本節の目標であった次を得る。

定理 10. 上記のように，L 因子 $L(s,\pi_v,\mathrm{Std}_{n_1}\boxtimes\mathrm{Std}_{n_2}^\vee)$, $L(s,\pi_v,\mathrm{Std}_{n_1}^\vee\boxtimes\mathrm{Std}_{n_2})$ および ϵ 因子 $\epsilon(s,\pi_v,\mathrm{Std}_{n_1}\boxtimes\mathrm{Std}_{n_2}^\vee,\psi_v)$ を定め，

$$L(s,\pi,\mathrm{Std}_{n_1}\boxtimes\mathrm{Std}_{n_2}^\vee):=\prod_v L(s,\pi_v,\mathrm{Std}_{n_1}\boxtimes\mathrm{Std}_{n_2}^\vee)$$
$$L(s,\pi,\mathrm{Std}_{n_1}^\vee\boxtimes\mathrm{Std}_{n_2}):=\prod_v L(s,\pi_v,\mathrm{Std}_{n_1}^\vee\boxtimes\mathrm{Std}_{n_2})$$
$$\epsilon(s,\pi,\mathrm{Std}_{n_1}\boxtimes\mathrm{Std}_{n_2}^\vee):=\prod_{v\in S_\pi}\epsilon(s,\pi_v,\mathrm{Std}_{n_1}\boxtimes\mathrm{Std}_{n_2}^\vee,\psi_v)$$

と置く。すると, $L(s,\pi,\mathrm{Std}_{n_1}\boxtimes\mathrm{Std}_{n_2}^\vee)$ および $L(s,\pi,\mathrm{Std}_{n_1}^\vee\boxtimes\mathrm{Std}_{n_2})$ は，全 s-平面に有理型に解析接続されて，関数等式

$$L(s,\pi,\mathrm{Std}_{n_1}\boxtimes\mathrm{Std}_{n_2}^\vee)=\epsilon(s,\pi,\mathrm{Std}_{n_1}\boxtimes\mathrm{Std}_{n_2}^\vee)L(1-s,\pi,\mathrm{Std}_{n_1}^\vee\boxtimes\mathrm{Std}_{n_2}).$$

を満たす。 □

注意. (1) さらに, $L(s,\pi,\mathrm{Std}_{n_1}\boxtimes\mathrm{Std}_{n_2}^\vee)$ は，$n_1=n_2$ かつ $\pi_1\cong\pi_2|\det(\cdot)|^{\sqrt{-1}t}$ ($t\in\mathbf{R}$) のときを除いて整関数であることもわかる ([Ki-1999])。これは, すでに [M-W-1989] においても示されていた。また，この事実は Rankin-Selberg method によっても示されている。すなわち, まず [J-S-1981b, §3] で，部分 L 関数 $L^{S_\pi}(s,\pi,\mathrm{Std}_{n_1}\boxtimes\mathrm{Std}_{n_2}^\vee)$ の極について対応する結果が示された（正確な statement は原論文を参照)。その後の分岐有限素点および無限素点における局所関数等式を示した仕事 ([J-PS-S-1983] および [J-S-1990]) を待って，上記の事実の Rankin-Selberg method による証明が完結した。
(2) 上記の様に局所係数から定めた L 因子，ϵ 因子が，Rankin-Selberg method([J-PS-S-1983]) で局所ゼータ積分の解析から定義される L 因子，ϵ 因子が一致することが確かめられている ([Shah-1984], [J-PS-S-1983] の結果による。[Shah-1990, page 308] を参照)。

(2.8) A non-vanishing theorem. 次の結果のうち，$\mathrm{Re}(s)=1$ 上での non-vanishing が, (8) と Eisensetin 級数の一般的な性質からわかる。

定理 11 ([J-Sh-1981a], [Shah-1981])**.** $\mathrm{Re}(s)\geq 1$ 上で

$$L(s,\pi,\mathrm{Std}_{n_1}\boxtimes\mathrm{Std}_{n_2}^\vee)\neq 0$$

である。 □

Proof. $v\in S_\pi$ に対して, $L(s,\pi_v,\mathrm{Std}_{n_1}\boxtimes\mathrm{Std}_{n_2}^\vee)\neq 0$ なので，$L^{S_\pi}(s,\pi,\mathrm{Std}_{n_1}\boxtimes\mathrm{Std}_{n_2}^\vee)\neq 0$ が $\mathrm{Re}(s)\geq 1$ で成立することを言えば良い。$\mathrm{Re}(s)>1$ では，[J-Sh-1981a，Theorem 5.3] で示されている。一方，(8) において，各 $v\in S_\pi$ に対して，$\lambda_G^{(v)}(\widetilde{f}_v(1,\cdot))\neq 0$ である様に

$\widetilde{f}_v(s,g)$ を取ることができる。Eisenstein 級数 $E(s,g;f)$ は $\mathrm{Re}(s)=0$ 上で整型である ([都築, §3.3] 参照) ことから，その Whittaker 係数 $E_\psi(s,e;f)$ も $\mathrm{Re}(s)=0$ 上で整型である。したがって，$L^{S_\pi}(s,\pi,\mathrm{Std}_{n_1}\boxtimes\mathrm{Std}_{n_2}^\vee)$ は，$\mathrm{Re}(s)=1$ 上で零点を持ちえないことがわかる ([都築 §1.4] で解説された，リーマンゼータ関数のときと同じ議論)。 □

注意. (1) この節で述べた議論は，G が一般の準分裂簡約可能代数群で，M が G の極大放物型部分群 P の Levi 部分群の場合にも展開できる ([Ki-2004, Ch.8-Ch.11])。但し，次の２点には注意すべきである。

(i) 上記の計算から分かるように，M のカスプ保型表現 π が Whittaker 模型を持たないとすると，$E_\psi(s,f,e)$ は恒等的にゼロになってしまい何の情報も得られない。したがって，カスプ保型表現 π は大域 Whittaker 模型を持つと仮定する必要がある (このとき，π は Whittaker type であるとか，(globally) generic である，などという)。この仮定は，上で扱った場合は，$M\cong GL(n_1)\times GL(n_2)$ なので，定理１によって常に満たされているが，一般の場合には π に強い制約を課すことになる。genericity の仮定を外す試みが，[Fr-Go-1999] でなされている。

(ii) 一般の場合には，$M(\mathbf{A})$ 上のカスプ保型表現 π の ${}^LM$ の $\mathrm{Lie}({}^LN)$ への随伴表現の既約分解を $r=\oplus_{i=1}^{m(P,G)}r_i$ とすると，$\prod_{i=1}^{m(P,G)}L(1+s,\pi,r_i)^{-1}$ が Eisenstein 級数の Whittaker 係数として現れる。個々の $L(s,\pi,r_i)$ に関する情報を得るには，定数項の場合 ([都築, §4]) と同様に，ある種の帰納法がうまく働くという「幸運」を利用する。詳細は [Ki-2004, Ch.11] を参照。

(2) Klingen Eisenstein 級数のフーリエ展開が，S. Mizumoto, S. Boecherer らによって研究されている。たとえば，S. Mizumoto ([Mi-1981]) は，楕円保型形式 φ から誘導された次数２の Klingen Eisenstein 級数のフーリエ展開係数を適当な条件下で求めている。このフーリエ展開係数には，$L(s,\varphi,\mathrm{Ad})$ が現れ (Adjoint L 関数 $L(s,\varphi,\mathrm{Ad})$ の定義は [Narita, §3] 参照)，その特殊値が調べられている。これらの仕事におけるフーリエ展開係数と，Langlands-Shahidi method における Whittaker 係数は同一ではないが，何らかの関係が期待される。

3 応用: converse theorem と functorial lifting

序で述べたように，Langlands-Shahidi method は，保型表現の functorial lifting の存在を確立する問題に応用されている。本節では，その一例として，GSp_4 の generic なカスプ保型表現から GL_4 の保型表現への functorial lifting について概観する ([石川, 第２章の冒頭, §2.2] も参照) 。原論文は，[A-S-2006a] および [A-S-2006b] である。以下では，依然として基礎体を $\mathbf{Q}$ として記述するが，これらの論文では，一般の代数体上で議論が展開されている。

(3.1) a lifting problem. $G = GSp_4$ を次数 2 の similitude 付きの斜交群とする (この群を GSp_2 と書く人も多いが，上記論文に合わせる):

$$G = GSp_4 := \left\{ g \in GL_4 \mid \exists \nu(g) \in GL(1) \text{ s.t. } {}^t gJg = \nu(g)J \right\}, \quad J = \begin{pmatrix} 0_2 & 1_2 \\ -1_2 & 0_2 \end{pmatrix}.$$

このとき，G の双対群 ${}^L G^\circ$ は $GSp_4(\mathbf{C})$ であることが，簡単に確かめられる。L 準同型 spin を包含写像

$$\mathrm{spin} : {}^L G^\circ = GSp_4(\mathbf{C}) \hookrightarrow GL_4(\mathbf{C})$$

で定める。$GSp_4(\mathbf{A})$ の (カスプ) 保型表現 π に対して，$L(s, \pi, \mathrm{spin})$ は spinor L 関数と呼ばれる。さて，Langlands の函手性予想 ([成田, §4]) によれば，次が期待される:

予想 12. $\pi \cong \otimes'_v \pi_v$ を $GSp_4(\mathbf{A})$ の保型表現でユニタリな中心指標 $\omega = \otimes'_v \omega_v$ を持つものとする。$S_\pi := \{\pi$の分岐有限素点の全体$\} \cup \{\infty\}$ とする。$p \notin S_\pi$, $p < \infty$ に対して，π_p の *Satake parameter* を $A_p \in GSp(4, \mathbf{C})$ とする。Π''_p を，$A''_p = \mathrm{spin}(A_p) \in GL_4(\mathbf{C})$ を *Satake parameter* に持つ $GL_4(\mathbf{Q}_p)$ の不分岐な既約許容表現とする。このとき，$GL_4(\mathbf{A})$ の（カスピダルとは限らぬ）保型表現 $\Pi \cong \otimes' \Pi_v$ で

$$\Pi_p \cong \Pi''_p, \qquad p \notin S_\pi \tag{16}$$

を満たすものが存在するであろう。したがって，特に

$$L^{S_\pi}(s, \pi, \mathrm{spin}) = L^{S_\pi}(s, \Pi, \mathrm{Std}_4)$$

となるものが存在するであろう。 □

M. Asgari と F. Shahidi は，Langlands-Shahidi method を用いて次を示した。

定理 13 ([A-S-2006a])**.** π が大域 *Whittaker* 模型を持つカスプ保型表現ならば, 上の予想は正しい。 □

[A-S-2006a] では，もっと一般に $GSpin_n$ から $GL_{2[n/2]}$ への functorial lifting の存在が示されている。$GSp_4 \cong GSpin_5$ なので，この定理１３は $n = 5$ の場合である。

(3.2) 定理１３の証明の概略. Π の候補 $\Pi' \cong \otimes' \Pi'_v$ を次の様に構成する。
(i) $v = p \notin S_\pi$ のとき $\Pi'_p \cong \Pi''_p$ とする。
(ii) $v = \infty$ のとき。π_∞ の Langlands parameter を

$$\phi : W_{\mathbf{R}} \to {}^L G^\circ = GSp_4(\mathbf{C})$$

とする。これと L 準同型 spin を合成して

$$\mathrm{spin} \circ \phi : W_{\mathbf{R}} \to {}^L GL_4{}^\circ = GL_4(\mathbf{C})$$

を得る。一般線型群 GL_n では，局所 Langlands 対応 ([Bo-1979, §11])

$$\{GL_n(\mathbf{R}) \text{ の既約許容表現の同値類 }\} \to \{W_{\mathbf{R}} \text{ の } n \text{ 次元表現}/\mathbf{C} \text{ の同値類 }\}$$

は全単射なので, $\mathrm{spin} \circ \phi$ に対応する $GL_4(\mathbf{R})$ の既約許容表現 Π'_∞ がただひとつ定まる。
(iii) $v \in S_\pi$, $v < \infty$ のときは，Π'_v として，とりあえず中心指標が ω_v^2 であるような既約許

容表現 π_v を一つずつとっておく。

このようにして構成した $GL_4(\mathbf{A})$ の既約許容表現 $\Pi' \cong \otimes' \Pi'_v$ に対して, Cogdell-Piatetski-Shapiro の逆定理 ([C-PS-1994], [C-PS-1999]) を次の形で適用する。以下, GL_m のカスプ保型表現 τ に対して，$\tau \otimes \eta$ は $\tau \otimes \eta := \{\eta(\det(g))\varphi(g) \mid \varphi \in \tau\}$ で定義される GL_m のカスプ保型表現を表す。

定理 14 ([C-K-PS-S-2001, §2])**.** $\Pi' \cong \otimes_v \Pi'_v$ を $GL_n(\mathbf{A})$ の既約許容表現でその中心指標が *Hecke* 指標であるものとする。$L(s, \Pi', \mathrm{Std}_n)$ は $\mathrm{Re}(s) \gg 0$ で絶対収束しているものとする。また，S を有限素点の有限集合とする。

$$\mathcal{T}^S := \cup_{1 \le m \le n-1} \mathcal{T}^S(m)$$
$$\mathcal{T}^S(m) := \{\tau \cong \otimes'_v \tau_v \mid GL_m(\mathbf{A}) \text{ のカスプ保型表現で，} v \in S \text{ に対しては } \tau_v \text{ は不分岐}\}$$

と置く。*Hecke* 指標 $\eta : \mathbf{A}^\times/\mathbf{Q}^\times \to \mathbf{C}^\times$ が存在して，すべての $\tau \in \mathcal{T}^S$ について，次の *3* 条件の成立を仮定する*:*

(i) $L(s, \Pi' \times (\tau \otimes \eta), \mathrm{Std}_n \boxtimes \mathrm{Std}_m)$ は整関数；
(ii) 次の関数等式

$$\begin{aligned} &L(s, \Pi' \times (\tau \otimes \eta), \mathrm{Std}_n \boxtimes \mathrm{Std}_m) \\ =&\epsilon(s, \Pi' \times (\tau \otimes \eta), \mathrm{Std}_n \boxtimes \mathrm{Std}_m) L(1-s, \Pi' \times (\tau \otimes \eta), \mathrm{Std}_n^\vee \boxtimes \mathrm{Std}_m^\vee) \end{aligned}$$

が成立する；
(iii) $L(s, \Pi' \times (\tau \otimes \eta), \mathrm{Std}_n \boxtimes \mathrm{Std}_m)$ は，全ての有限の幅を持つ垂直領域 $\{s \in \mathbf{C} | t_1 < \mathrm{Re}(s) < t_2\}$ において有界である。

このとき，$GL_n(\mathbf{A})$ の *(*カスピダルとは限らない*)* 既約保型表現 $\Pi \cong \otimes' \Pi_v$ で，$\Pi_v \cong \Pi'_v$ $(v \notin S)$ となるものが存在する。 □

定理１３を示すためには，$S = S_{\pi_\mathrm{f}}$ と先に構成した $\Pi' \cong \otimes_v \Pi'_v$ に対して，定理１４の仮定 (i)-(iii) を満たす η が存在することを証明すればよい。$GSp_4 \times GL_m \cong GSpin_5 \times GL_m$ は $GSpin_{5+2m}$ $(m = 1, 2, 3)$ の放物型部分群の Levi 部分群であることに注意する。また，π と τ は, それぞれ仮定と定理１によって，大域 Whittaker 模型を持ち，Langlands-Shahidi method が適用できる。すなわち，(π, τ) から $GSpin_{5+2m}$ 上の Eisenstein 級数を構成し，その Whittaker 係数を計算する。すると，第２節で解説した方法で，$L(s, \pi \times (\tau \otimes \eta), \mathrm{spin} \boxtimes \mathrm{Std}_m)$ を調べることができる。特に，全ての素点 v で L 因子，ϵ 因子が関数等式を満たすように定義できる。さて, Hecke 指標 $\eta : \mathbf{A}^\times/\mathbf{Q}^\times \to \mathbf{C}^{(1)}$ を全ての $v \in S_{\pi_\mathrm{f}}$ で十分に分岐するようにとる。すると, 全ての $v \in S_{\pi_\mathrm{f}}$ に対して

$$L(s, \Pi'_v \times (\tau_v \otimes \eta_v), \mathrm{Std}_4 \boxtimes \mathrm{Std}_m) \equiv 1 \qquad L(s, \pi_v \times (\tau_v \otimes \eta_v), \mathrm{spin} \boxtimes \mathrm{Std}_m) \equiv 1 \tag{17}$$

が成立することが示せる。したがって，

$$\begin{aligned} &L(s, \Pi' \times (\tau \otimes \eta), \mathrm{Std}_4 \boxtimes \mathrm{Std}_m) = L^{S_\pi}(s, \Pi' \times (\tau \otimes \eta), \mathrm{Std}_4 \boxtimes \mathrm{Std}_m) \\ =&L^{S_\pi}(s, \pi \times (\tau \otimes \eta), \mathrm{spin} \boxtimes \mathrm{Std}_m) = L(s, \pi \times (\tau \otimes \eta), \mathrm{spin} \boxtimes \mathrm{Std}_m) \end{aligned} \tag{18}$$

が成立することがわかる。ここで，右辺が整関数であることが Langlands-Shahidi method によって示せるので, 条件 (i) が満たされる。また,「γ-factor の stability」によって，

$$\epsilon(s, \Pi'_v \times (\tau_v \otimes \eta_v), \mathrm{Std}_4 \boxtimes \mathrm{Std}_m, \psi_v) = \epsilon(s, \pi_v \times (\tau_v \otimes \eta_v), \mathrm{spin} \boxtimes \mathrm{Std}_m, \psi_v)$$

が成立するので，条件 (ii)（関数等式）も確かめられる。さらに，[Ge-Sh-2001] によって，$L(s, \pi \times (\tau \otimes \eta), \mathrm{spin} \boxtimes \mathrm{Std}_m)$ がすべての垂直領域上で有界であることが示せる。（まず，$\mathrm{Re}(s) \gg 0$ で証明すれば，完全な関数等式を示してあるので，Phragmen-Lindelöf principle を用いることができる)。したがって, (18) より, 条件 (iii) も成立することがわかる。こうして，逆定理の仮定 (i)-(iii) が確かめられたので，定理１３が従う。 □

(3.3) いくつかの帰結. [A-S-2006-b] では，一部 Rankin-Selberg method も援用して，次を示している:

定理 15. 定理１３で存在が保障された $GL_4(\mathbf{A})$ の保型表現 Π は, 次のいずれかである。
(A) $GL_4(\mathbf{A})$ のカスプ保型表現*;*
(B) $\mathrm{Ind}_{P_{2,2}(\mathbf{A})}^{GL_4(\mathbf{A})}((\sigma_1 \otimes \sigma_2) \otimes \delta_P^{1/2})$ *(*σ_i は $GL_2(\mathbf{A})$ のカスプ保型表現*).* □

Case (A)(resp. Case (B)) のとき，$p \in S_{\pi_\mathrm{f}}$ に対して，$L(s, \pi_p, \mathrm{spin}) := L(s, \Pi_p, \mathrm{Std}_4)$ (resp. $L(s, \sigma_{1,p}, \mathrm{Std}_2) L(s, \sigma_{2,p}, \mathrm{Std}_2)$) によって spinor L-関数の局所因子を定めてやると，$L(s, \pi, \mathrm{spin}) = L(s, \Pi, \mathrm{Std}_4)$ (resp. $L(s, \sigma_1, \mathrm{Std}_2) L(s, \sigma_2, \mathrm{Std}_2)$) となる。ここで, 定理１０の後の注意 (1) を用いれば，次の系の (i) を得る：

系 16. π を定理１３のとおりとする。このとき次が成立*:*
(i) $L(s, \pi, \mathrm{spin})$ は整関数である。
(ii) $p \notin S_\pi$ とする。$\mathrm{diag}(a_1, a_2, a_1^{-1} a_0, a_2^{-1} a_0) \in GSp_4(\mathbf{C})$ を π_p の *Satake parameter* とする。このとき

$$\begin{aligned} &\textit{Case(A)}: \quad p^{-9/22} < |a_i| < p^{9/22}, \quad (i = 1, 2) \\ &\textit{Case(B)}: \quad p^{-7/64} < |a_i| < p^{7/64}, \quad (i = 1, 2) \end{aligned}$$

が成立する。 □

(ii) は, [L-R-S-1996] による $GL_n(\mathbf{A})$ のカスプ保型表現に対する Satake parameter の評価 ([都築 §2.3.2]) を $n = 2, 4$ に適用すれば直ちに得られる。一方, ゼータ積分の不分岐解析から得られる評価は $p^{-3/2} < |a_i| < p^{3/2}$ $(i = 1, 2)$ である ([Mo-2004, p.908])。したがって, 大域的な結果を用いて得られた上記の評価のほうが, ずっと良いことがわかる。なお,「大域 Whittaker 模型を持つユニタリなカスプ保型表現 π に対しては, 一般 Ramanujan 予想が成立するだろう（すなわち π の各局所成分 π_v は tempered であろう)」が正しいとするならば, $|a_i| = 1$ $(i = 1, 2)$ となるはずである。

注意. (1) (i) の主張は，無限素点 ∞ において，局所成分 π_∞ が Siegel 型放物型部分群から誘導した主系列表現に同値でないときには，[Mo-2004], [Is-Mo-2008] で, Rankin-Selberg method を用いてすでに示されていた。但し，$p \in S_{\pi_\mathrm{f}}$ において, 上記のように $GL_4(\mathbf{A})$ の保型表現 Π の局所因子を用いて定義した $L(s, \pi_p, \mathrm{spin})$ と Rankin-Selberg method を用いて定義した局所因子とが一致するかどうかは不明である。
(2) π の中心指標をユニタリとしていることから，$|a_0| = 1$ である。

References

[A-S-2006a] Asgari, M and Shahidi, F., Generic transfer for general spin groups, Duke Math. J. **132** (2006), no. 1, 137–190.

[A-S-2006b] Asgari, M and Shahidi, F., Generic transfer from GSp(4) to GL(4), Compos. Math. **142** (2006), no. 3, 541–550.

[Bl-1994] Blasius, D., On multiplicities for SL(n), Israel J. Math. **88** (1994), no. 1-3, 237–251.

[Bo-1979] Borel, A., Automorphic L-functions, In: Automorphic forms, representations and L-functions, Proc. Sympos. Pure Math. **33-2** (1979), 27–61.

[B-M-1994] Barbasch, D. and Moy, A., Whittaker models with an Iwahori fixed vector. In: Representation theory and analysis on homogeneous spaces, Contemp. Math. 177, Amer. Math. Soc. (1994), 101-105.

[C-S-1980] Casselman, W and Shalika, J. A., The unramified principal series of p-adic groups, II. The Whittaker function. Compositio Math **41** (1980) no.2, 207-231.

[C-PS-1994] Cogdell, J and Piatetski-Shapiro, I. I., Converse theorems for GLn, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **79** (1994), 157 – 214.

[C-PS-1999] Cogdell, J and Piatetski-Shapiro, I. I., Converse theorems for GLn,II, J. Reine Angew. Math. **507** (1999) 165 – 188.

[C-K-PS-S-2002] Cogdell, J, Kim, H, Piatetski-Shapiro, I. I. and Shahidi, F., On lifting from classical groups to GL(N)., Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **93** (2001), 5 – 30.

[Fr-Go-1999] Friedberg, S and Goldberg, D., On local coefficients for non-generic representations of some classical groups., (English summary) Compositio Math. **116** (1999), no. 2, 133–166.

[G-G-J-2002] Gan, W. T, Gurevich, N. and Jiang, D , Cubic unipotent Arthur parameters and multiplicities of square integral automorphic representations., Invent. Math **149** (2002) 225-265.

[Ge-Sh-1988] Gelbart, S and Shahidi, F., Analytic properties of automorphic L-functions, Perspectives in Mathematics, 6. Academic Press, Inc., Boston, MA, 1988.

[Ge-Sh-2001] Gelbart, S and Shahidi, F., Boundedness of automorphic L-functions in vertical strips, J. Amer. Math. Soc. **14** (2001), no. 1, 79–107.

[G-W-1980] Goodmann, J. and Wallach, N., Whittaker vectors and conical vectors, J. Funct. Anal. **39** (1980), 199–279.

[Is-Mo-2008] Ishii, T. and Moriyama, T., Spinor L-functions for generic cusp forms on GSp(2) belonging to principal series representations, Trans. Amer. Math. Soc. **360** (2008), no. 11, 5683–5709.

[H-PS-1984] Howe, R and Piatetski-Shapiro, I., Some examples of automorphic forms on Sp_4., Duke Math. J. **50** (1983), no. 1, 55–106.

[Ja-Sh-1981a] Jacquet, H. and Shalika, J. A., On Euler products and the classification of automorphic representations. I., Amer. J. Math. **103** (1981), no. 3, 499–558.

[Ja-Sh-1981b] Jacquet, H. and Shalika, J. A., On Euler products and the classification of automorphic forms. II., Amer. J. Math. **103** (1981), no. 4, 777–815.

[Ja-Sh-1990] Jacquet, H. and Shalika, J. A., Rankin-Selberg convolutions: Archimedean theory., Festschrift in honor of I. I. Piatetski-Shapiro on the occasion of his sixtieth birthday, Part I (Ramat Aviv, 1989), 125–207, Israel Math. Conf. Proc., 2, Weizmann, Jerusalem, 1990.

[Ja-PS-Sh-1983] Jacquet, H. Piatetskii-Shapiro, I. I. and Shalika, J. A., Rankin-Selberg convolutions., Amer. J. Math. **105** (1983), no. 2, 367–464.

[Ki-Sh-2002] Kim, H. and Shahidi, F., Functorial products for $\mathrm{GL}_2 \times \mathrm{GL}_3$ and the symmetric cube for GL_2, With an appendix by Colin J. Bushnell and Guy Henniart. Ann. of Math. (2) **155** (2002), no. 3, 837–893.

[Ki-1999] Kim, H., Langlands-Shahidi method and poles of automorphic L-functions: application to exterior square L-functions., Canad. J. Math. **51** (1999), no. 4, 835–849.

[Ki-2004] Kim, H., Automorphic L-functions, In: Lectures on automorphic L-functions, 97–201, Fields Inst. Monogr., 20, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (2004).

[Kl-1967] Klingen, H., Zum Darstellungssatz für Siegelsche Modulformen, (German) Math. Z. **102** (1967) 30–43.

[Li-1992] Li, J-S., Some results on the unramified principal series of p-adic groups, Math. Ann. **292** (1992), 747-761.

[L-1966] Langlands, R. P., Eisenstein series., In: Algebraic Groups and Discontinuous Subgroups Proc. Sympos. Pure Math.**9**, (1966) pp. 235–252 Amer. Math. Soc., Providence, R.I.

[L-1971] Langlands, R. P., Euler products, A James K. Whittemore Lecture in Mathematics given at Yale University, 1967. Yale Mathematical Monographs, 1. Yale University Press, New Haven, Conn.-London, 1971. v+53 pp.

[L-1976] Langlands, R. P., On the functional equations satisfied by Eisenstein series., Lecture Notes in Mathematics, Vol. 544. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1976. v+337 pp.

[L-R-S-1996] Luo, W. Rudnik, Z and Sarnak, P, On the generalized Ramanujan conjecture for $GL(n)$, In: Automorphic forms, automorphic representations, and arithmetic, Fort Worth, TX, 1996, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, **66** (American Mathematical Society, Providence, RI, 1999), 301–310.

[Mi-1981] Mizumoto, S., Fourier coefficients of generalized Eisenstein series of degree two. I, Invent. Math. **65** (1981/82), no. 1, 115–135.

[M-W-1989] Moeglin, C. and Waldspurger, J.-L., Le spectre résiduel de $\mathrm{GL}(n)$. Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **22** (1989), no. 4, 605–674.

[Mo-2004] Moriyama, T., Entireness of the spinor L-functions for certain generic cusp forms on GSp(2), Amer. J. Math **126** (2004), 899-920..

[Re-1993] Reeder. M., p-adic Whittaker functions and vector bundles on flag manifolds, Compositio Math. **85** (1993), 9–36.

[Ro-1973] Rodier. F., Whittaker models for admissible representations of reductive p-adic split groups, Proc. Sympos. Pure Math., **26** (1973), 425–430.

[Shah-1978] Shahidi, F., Functional equation satisfied by certain L-functions., Compositio Math. **37** (1978), no. 2, 171–207.

[Shah-1981] Shahidi, F., On certain L-functions, Amer. J. Math. **103** (1981), no. 2, 297–355.

[Shah-1984] Shahidi, F., Fourier transforms of intertwining operators and Plancherel measures for $\mathrm{GL}(n)$, Amer. J. Math. **106** (1984), no. 1, 67–111.

[Shah-1985] Shahidi, F., Local coefficients as Artin factors for real groups., Duke Math. J. **52** (1985), no. 4, 973–1007.

[Shah-1988] Shahidi, F., On the Ramanujan conjecture and finiteness of poles for certain L-functions., Ann. of Math. (2) **127** (1988), no. 3, 547–584.

[Shah-1990] Shahidi, F., A proof of Langlands' conjecture on Plancherel measures; complementary series for p-adic groups., Ann. of Math. (2) **132** (1990), no. 2, 273–330.

[Shah-2007] Shahidi, F., Langlands-Shahidi method, Automorphic forms and applications, 299–330, IAS/Park City Math. Ser., 12, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007.

[Shal-1974] Shalika, J.A., The multiplicity one theorem for GL_n, Ann. of Math. (2) **100** (1974), 171–193.

[Wa-1983] Wallach, N., Asymptotic expansions of generalized matrix entries of representations of real reductive groups, Lecture Notes in Mathematics **1024**, Springer-Verlag 287–369, (1983).

[石井] Ishii, T., 一変数保型形式に付随する L 関数, these proceedings.

[今野] Kon-no, T., $\mathrm{G}L_2$ 上の保型形式とその標準 L 函数, these proceedings.

[成田] Narita, H., 保型 L 関数の定義 –motivations and problems–, these proceedings.

[都築] Tsuzuki, M. Eisenstein 級数の定数項 (Langlands-Shahidi 法への導入), these proceedings.
[石川] Ishikawa, Y., Rankin-Selberg method–through typical examples–, these proceedings.

Department of Mathematics, Osaka University, 1-1 Machikaneyama, Toyonaka, Osaka, Japan

E-mail address: `moriyama[at]math.sci.osaka-u.ac.jp`