

ガロア表現の基礎 II

千田雅隆 (京都大学大学院理学研究科)

概要

この記事では [37] に続き, Galois 表現に関する基本的な topic について概観する.

本稿では Galois 表現の理論に関連する topic として, 一つ目に Chebotarev の密度定理とその応用, 二つ目の話題として Fontaine-Mazur 予想を紹介し, 最後に Galois 表現に対して定義される L 関数についての様々な予想と知られている結果について解説を行う. Chebotarev の密度定理は与えられた二つの Galois 表現が同値となるかどうかの判定条件を考察する際に重要な役割を果たす. 特に Frobenius 元の固有多項式が一致すれば Galois 表現が同値になるという結果が Chebotarev の密度定理からどのように導かれるかということを紹介する. 次の節では Galois 表現がいつ代数多様体の étale cohomology として得られるかという問題についての予想である Fontaine-Mazur 予想を紹介し, さらに保型形式の Galois 表現との関連を説明する. 最後の節では Galois 表現に対して L 関数を定義し, 期待されている性質, 特に関数等式についての予想の定式化や Artin 予想について解説を行う. 第二章の後半で楕円保型形式に付随する Galois 表現の構成についての idea について説明を加えたことと, 講演ではあまり触れることのできなかつた Chebotarev の密度定理の証明の概略や Galois 表現に対して定義される L 関数についての関数等式の予想の定式化を詳しく述べた点が講演内容との主な違いである.

目次

1	Chebotarev の密度定理	2
1.1	自然密度と解析的密度	2
1.2	Chebotarev の密度定理とその応用	2
1.3	Galois 表現の同値性判定条件	3
1.4	Chebotarev の密度定理の証明の方針	4
2	Fontaine-Mazur 予想と保型形式に伴う Galois 表現	7
2.1	幾何的な Galois 表現と Fontaine-Mazur 予想	7
2.2	Fontaine-Mazur 予想と保型形式に付随する Galois 表現	9
2.3	保型形式に付随する Galois 表現の構成	10
2.3.1	modular 曲線	11
2.3.2	Hecke 対応	12
2.3.3	重さが 2 の保型形式の場合	12
2.3.4	重さが 2 より大きい保型形式の場合	13

3	Galois 表現から定まる L 関数	14
3.1	L 関数の定義	15
3.2	Galois 表現の導手	16
3.2.1	不変量 ε, δ, f	16
3.2.2	$\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ の ℓ 進表現の導手	17
3.2.3	代数多様体に付随する ℓ 進表現の導手	18
3.3	$\text{mod } \ell$ 表現と ℓ 進表現の導手の関係	19
3.4	L 関数の関数等式についての予想	20
3.5	Artin 予想	21

1 Chebotarev の密度定理

この章では代数体の Galois 表現を調べる際に重要な役割を果たす Chebotarev の密度定理とその応用についての紹介を行う. 代数体の絶対 Galois 群の表現の様子を調べる際, Frobenius 元たちの行き先をみるのが重要であり, 実際, Frobenius 元たちの像の trace の情報で Galois 表現の半単純化の様子が一意に定まってしまう. このことを示すのに Chebotarev の密度定理が使われる. この節では初めに Chebotarev の密度定理の内容を復習し, その後に Galois 表現の同値性判定条件について紹介し, 最後に Chebotarev の密度定理の証明の概略について述べる..

1.1 自然密度と解析的密度

K を代数体, \mathcal{O}_K を K の整数環, S_K を K のすべての素 ideal のなす集合とする. また, S を S_K の部分集合とする. このとき正の実数 X に対し

$$d(S, X) = \frac{\#\{\mathfrak{p} \in S \mid \#(\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}) \leq X\}}{\#\{\mathfrak{p} \in S_K \mid \#(\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}) \leq X\}}$$

とおく. $\lim_{X \rightarrow \infty} d(S, X)$ が存在するとき, この極限の値 $d(S) = \lim_{X \rightarrow \infty} d(S, X)$ を S の自然密度と呼ぶ. また,

$$d_{\text{an}}(S, s) = \frac{\sum_{\mathfrak{p} \in S} \#(\mathcal{O}_K/\mathfrak{p})^{-s}}{\sum_{\mathfrak{p} \in S_K} \#(\mathcal{O}_K/\mathfrak{p})^{-s}}$$

とおき, $\lim_{s \rightarrow 1^+} d_{\text{an}}(S, s)$ が存在するとき, この極限の値 $d_{\text{an}}(S) = \lim_{s \rightarrow 1^+} d_{\text{an}}(S, s)$ を S の解析的密度 (または Dirichlet 密度) と呼ぶ.

注 1.1 S が自然密度を持てば S は解析的密度も持ち, その値は等しい. しかし一般には逆は成立しない. 例えば 10 進展開したときに 1 で始まる素数の集合 S は解析的密度を持ち, それは $\log_{10} 2$ となるが自然密度は持たない(cf. [26]).

1.2 Chebotarev の密度定理とその応用

定理 1.2 (Chebotarev の密度定理) L/K を代数体の有限次 Galois 拡大, σ を $\text{Gal}(L/K)$ の元, $\Delta_{L/K}$ を相対判別式とする. また, $C = [\sigma] := \{\tau\sigma\tau^{-1} \mid \tau \in \text{Gal}(L/K)\}$ を σ の共役

類とし,

$$S = \{\mathfrak{p} : K \text{ の素 ideal} \mid [\text{Frob}_{\mathfrak{p}}] = C, \mathfrak{p} \nmid \Delta_{L/K}\}$$

とおく. このとき S は解析的密度を持ち, さらにその値は

$$d_{\text{an}}(S) = \frac{\#C}{\#\text{Gal}(L/K)}$$

で与えられる.

注 1.3 Chebotarev によるもともとの結果は上で述べたように解析的密度に関する結果であるが, Hecke によるより精密な議論(cf. [11]) を適用することにより上記の定理の自然密度版も証明することができる. なお, Chebotarev の密度定理にまつわる歴史についてはStevenhagan と Lenstra Jr. による解説 [31] に詳しく書かれているので興味のある方は参照していただきたい.

次に Chebotarev の密度定理からすぐに得られる系を述べておく. K の素 ideal の有限集合 Σ に対して, K_{Σ} を Σ の外で不分岐な K の最大の Galois 拡大とし, $G_{K,\Sigma} = \text{Gal}(K_{\Sigma}/K)$ と書くことにする.

系 1.4 X を共役で安定な $G_{K,\Sigma}$ の部分集合で, 任意の $\mathfrak{p} \notin \Sigma$ に対して X は $[\text{Frob}_{\mathfrak{p}}]$ を含んでいるようなものとする. このとき X は $G_{K,\Sigma}$ の稠密な部分集合となる.

証明 $G_{K,\Sigma}$ は Σ の外不分岐な有限次 Galois 拡大 L/K の Galois 群の射影極限として $G_{K,\Sigma} = \varprojlim \text{Gal}(L/K)$ と書くことができる. 一般に profinite 群 $G = \varprojlim G_{\lambda}$ で各 λ に対し射影 $\pi_{\lambda} : G \rightarrow G_{\lambda}$ が全射となるものに対して, 部分集合 $X \subset G$ の閉包 \bar{X} は $\bar{X} = \varprojlim \pi_{\lambda}(X)$ で与えられる. このことから $X \subset G$ が稠密な部分集合であることと任意の λ に対し X の $G \rightarrow G_{\lambda}$ での像が全体に一致することは同値であることがわかる. λ を固定したとき, Chebotarev の密度定理によって各 Galois 群 G_{λ} の元 σ に対して $[\text{Frob}_{\mathfrak{p}}] = [\sigma]$ を満たす素 ideal \mathfrak{p} は無限に存在する. いま, X として $G_{K,\Sigma}$ 中の Frobenius 元全体の成す集合をとると X の $G \rightarrow \text{Gal}(L/K)$ (L は K の Σ の外不分岐な有限次拡大体) での像は全体に一致することがわかる. 以上から $G_{K,\Sigma}$ は Frobenius 元たちの集合 X を稠密な部分集合として含むことがわかる.(証明終わり)

1.3 Galois 表現の同値性判定条件

K を代数体とし, G_K をその絶対 Galois 群とする. E を \mathbb{Q}_p の有限次拡大とし, M を G_K の連続な作用を持つ有限次元 E -線形空間とする.

$$M = M_0 \supseteq M_1 \supseteq \cdots \supseteq M_t = \{0\}$$

を $E[G_K]$ -加群の減少列で, 各 $i = 0, 1, \dots, t-1$ に対し M_i/M_{i+1} が既約 $E[G_K]$ -加群(つまり $\{0\}$ とそれ自身以外に部分加群を持たないようなもの) になっているものとする. このとき

$$M^{\text{ss}} := \bigoplus_{i=0}^{t-1} M_i/M_{i+1}$$

のことを M の半単純化 (semisimplification) という. 特に M が半単純 $E[G_K]$ -加群であることと $M = M^{\text{ss}}$ であることは同値である. 次の事実は山内氏の記事 [37] の附録にて証明が与えられている.

定理 1.5 k を標数が 0 の体, Λ を k -代数とし, M_1 と M_2 を k 上有限次元な Λ -加群とする. このとき, 任意の $a \in \Lambda$ に対して $\text{Tr}_{M_1}(a) = \text{Tr}_{M_2}(a)$ が成立すれば M_1^{ss} と M_2^{ss} は Λ -加群として同型となる.

この主張と上で述べた Chebotarev の密度定理の系より次の事実が得られる.

系 1.6 (Galois 表現の同値性判定条件) k を標数 0 の位相体で K を代数体とする. Σ を K の素点の有限集合とし, V_1 と V_2 を k 上有限次元な連続 $k[G_{K,\Sigma}]$ -加群とする. このとき, 任意の $\mathfrak{p} \notin \Sigma$ に対して $\text{Tr}_{V_1}(\text{Frob}_{\mathfrak{p}}) = \text{Tr}_{V_2}(\text{Frob}_{\mathfrak{p}})$ が成立すれば $V_1^{\text{ss}} \cong V_2^{\text{ss}}$ となる. 言い換えると

$$\rho_1, \rho_2 : G_K \rightarrow \text{GL}_n(k)$$

を Σ の外不分岐な連続な Galois 表現とすると, 任意の $\mathfrak{p} \notin \Sigma$ に対して $\text{Tr} \rho_1(\text{Frob}_{\mathfrak{p}}) = \text{Tr} \rho_2(\text{Frob}_{\mathfrak{p}})$ が成立すれば $\rho_1^{\text{ss}} \cong \rho_2^{\text{ss}}$ となる.

k が有限体の場合は次のことが成立する.

定理 1.7 k を有限体, K を代数体とし, Σ を K の素点の有限集合とする.

$$\rho_1, \rho_2 : G_K \rightarrow \text{GL}_n(k)$$

を Σ の外不分岐な連続な Galois 表現とする.

(1) ρ_1 か ρ_2 のどちらか一方は既約と仮定する. このとき任意の $\mathfrak{p} \notin \Sigma$ に対して,

$$\text{Tr} \rho_1(\text{Frob}_{\mathfrak{p}}) = \text{Tr} \rho_2(\text{Frob}_{\mathfrak{p}})$$

が成立すれば $\rho_1 \cong \rho_2$ となる.

(2) 一般に任意の $\mathfrak{p} \notin \Sigma$ に対して,

$$\det(1 - \rho_1(\text{Frob}_{\mathfrak{p}})) = \det(1 - \rho_2(\text{Frob}_{\mathfrak{p}}))$$

が成立すれば $\rho_1^{\text{ss}} \cong \rho_2^{\text{ss}}$ となる.

上記のような Galois 表現の同値性判定条件については Carayol [4], Mazur [16] などに関連する記述があるので参照していただきたい. 日本語で書かれた文献としては [23] があるので合わせて参照していただきたい.

1.4 Chebotarev の密度定理の証明の方針

まずはじめに L/K が有限次 abel 拡大の場合に Chebotarev の密度定理を類指標に付随する L 関数の解析的性質を用いて証明する. これは古典的な Dirichlet の密度定理の証明を一般化することで得られる.

命題 1.8 L/K を有限次abel 拡大とする. 任意の $\sigma \in \text{Gal}(L/K)$ に対して

$$S = \left\{ \mathfrak{p} : L/K \text{ で不分岐な } K \text{ の素ideal} \mid \left(\frac{L/K}{\mathfrak{p}} \right) = \sigma \right\}$$

とおく. このとき $d_{\text{an}}(S) = \frac{1}{[L:K]}$ が成立する.

証明 類体論により, あるmodulus \mathfrak{m} と $I_{\mathfrak{m}} \supset H \supset \{(\alpha) \mid \alpha \in K^\times, \alpha \equiv 1 \pmod{\times \mathfrak{m}}\}$ となる $I_{\mathfrak{m}}$ の部分群 H が存在して $I_{\mathfrak{m}}/H \cong \text{Gal}(L/K)$ となる. 但し, $I_{\mathfrak{m}}$ は \mathfrak{m} と素な K の分数ideal の成す群を表す. 指標 $\chi : I_{\mathfrak{m}}/H \rightarrow \mathbb{C}^\times$ に対し,

$$L(s, \chi) = \prod_{\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{m}} (1 - \chi(\mathfrak{p})N\mathfrak{p}^{-s})^{-1}$$

とおく. このとき

$$\log L(s, \chi) = \sum_{\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{m}} \log(1 - \chi(\mathfrak{p})N\mathfrak{p}^{-s})^{-1} = \sum_{\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{m}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(\mathfrak{p})}{n \cdot N\mathfrak{p}^{sn}} = \sum_{\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{m}} \frac{\chi(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^s} + \sum_{\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{m}} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\chi(\mathfrak{p})}{n \cdot N\mathfrak{p}^{sn}}$$

であり, 最後の式の第二項は $\text{Re}(s) > \frac{1}{2}$ で収束するので

$$\log L(s, \chi) - \sum_{\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{m}} \frac{\chi(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^s}$$

は $\text{Re}(s) > \frac{1}{2}$ で収束することがわかる. $\log L(s, \chi)$ と $\sum_{\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{m}} \frac{\chi(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^s}$ は各々 $s = 1$ で発散するので

$$\log L(s, \chi) \sim \sum_{\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{m}} \frac{\chi(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^s} \quad (s \rightarrow 1^+)$$

である (\sim は両辺の比が $s \rightarrow 1^+$ のとき 1 に近づくことを意味する). いま, $\text{Gal}(L/K)^\vee$ を Galois 群 $\text{Gal}(L/K)$ の指標群とすれば,

$$\sum_{\chi \in \text{Gal}(L/K)^\vee} \chi(\mathfrak{p}) = \begin{cases} [L:K] & \mathfrak{p} \in H, \\ 0 & \mathfrak{p} \notin H \end{cases}$$

なので

$$\sum_{\chi} \log L(s, \chi) \sim [L:K] \cdot \sum_{\mathfrak{p} \in H} \frac{1}{N\mathfrak{p}^s} \quad (s \rightarrow 1^+)$$

となる. $\chi = \chi_0$ (自明な指標) のとき $L(s, \chi_0) = \zeta_K(s) \cdot \prod_{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{m}} (1 - N\mathfrak{p}^{-s})$ なので

$$\log L(s, \chi_0) \sim \log \zeta_K(s) \sim \log \frac{1}{s-1} \quad (s \rightarrow 1^+)$$

である. 一方 $\chi \neq \chi_0$ ならば $L(s, \chi)$ は $s = 1$ で正則かつ $L(s, \chi) \neq 0$ であることが知られているので, 結局

$$[L:K] \cdot \sum_{\mathfrak{p} \in H} N\mathfrak{p}^{-s} \sim \log \frac{1}{s-1}$$

がわかる. 以上から

$$d_{\text{an}}(\{\mathfrak{p} \in H\}) = \frac{1}{[L : K]}$$

が得られる. 他の共役類についても上の場合から従う.(証明終わり)

以下 L/K を abel とは限らない一般の有限次 Galois 拡大とする. $\sigma \in \text{Gal}(L/K)$ に対し, $\langle \sigma \rangle$ を σ で生成される $\text{Gal}(L/K)$ の部分群とし $M = L^{\langle \sigma \rangle}$ を σ によって固定される L の部分体とすれば, L/M は次数 $f = \#\langle \sigma \rangle$ の巡回拡大となる. また, C を σ の共役類とし, $c = \#C$ とおく. このとき

$$T_{M,\sigma} := \left\{ \mathfrak{q} : M \text{ の素 ideal } \mid \left(\frac{L/M}{\mathfrak{q}} \right) = \sigma, \mathfrak{q} \cap K \text{ を } \mathfrak{p} \text{ と書いたとき } f(\mathfrak{q}/\mathfrak{p}) = 1 \right\}$$

とおく. 但し, $f(\mathfrak{q}/\mathfrak{p}) = [\mathcal{O}_M/\mathfrak{q} : \mathcal{O}_K/\mathfrak{p}]$ は $\mathfrak{q}/\mathfrak{p}$ の相対次数を表す. 命題 1.8 と $f(\mathfrak{q}/\mathfrak{p}) = 1$ が成り立つような \mathcal{O}_M の素 ideal の密度が 1 であるという事実から

$$d_{\text{an}}(T_{M,\sigma}) = \frac{1}{f}$$

が得られる.

次に,

$$T_{L,\sigma} := \left\{ \mathfrak{P} : L \text{ の素 ideal } \mid \left(\frac{L/K}{\mathfrak{P}} \right) = \sigma \right\}$$

及び

$$T_{K,\sigma} := \left\{ \mathfrak{p} : K \text{ の素 ideal } \mid \left(\frac{L/K}{\mathfrak{p}} \right) \subset C \right\}$$

とおく. このとき次の補題が容易に示される.

補題 1.9 (1) $\alpha : T_{L,\sigma} \ni \mathfrak{P} \mapsto \mathfrak{P} \cap \mathcal{O}_M \in T_{M,\sigma}$ は全単射.

(2) $\beta : T_{L,\sigma} \ni \mathfrak{P} \mapsto \mathfrak{P} \cap \mathcal{O}_K \in T_{K,\sigma}$ は $([L : K] \cdot f^{-1} \cdot c^{-1}) : 1$ 写像.

証明 (1) の証明: α が well-defined であることを示す. $\mathfrak{P} \in T_{L,\sigma}$ に対し $\mathfrak{q} = \mathfrak{P} \cap \mathcal{O}_M$, $\mathfrak{p} = \mathfrak{P} \cap \mathcal{O}_K$ とおく. このとき $\text{Gal}(L_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{P}}) = \langle \sigma \rangle$ である. ところが σ は $M_{\mathfrak{q}}$ を固定しているので $M_{\mathfrak{q}} = K_{\mathfrak{p}}$ である. ゆえに $f(\mathfrak{q}/\mathfrak{p}) = 1$. よって α は well-defined.

次に写像の単射性を示す. $f(\mathfrak{P}/\mathfrak{q}) = f(\mathfrak{q}/\mathfrak{p})^{-1} f(\mathfrak{P}/\mathfrak{p}) = f$ なので \mathfrak{P} は \mathfrak{q} の上の唯一の素 ideal (L/M は f 次拡大). ゆえに α は単射.

全射性を示す. $\mathfrak{q} \in T_{M,\sigma}$ に対し, \mathfrak{P} を任意の \mathfrak{q} の上の素 ideal とする. このとき

$$\left(\frac{L/K}{\mathfrak{P}} \right) = \left(\frac{L/K}{\mathfrak{P}} \right)^{f(\mathfrak{q}/\mathfrak{p})} = \left(\frac{L/M}{\mathfrak{P}} \right) = \sigma$$

なので $\mathfrak{P} \in T_{L,\sigma}$. ゆえに α は全射.

(2) の証明: まず, $\mathfrak{p}_0 \in T_{K,\sigma}$ を一つ固定する. $\mathfrak{P}_0 \in T_{L,\sigma}$ を \mathfrak{p}_0 の上の素 ideal とすると

$$\left(\frac{L/K}{\mathfrak{P}_0^\tau} \right) = \tau \left(\frac{L/K}{\mathfrak{P}_0} \right) \tau^{-1}$$

が任意の $\tau \in \text{Gal}(L/K)$ に対して成立する. さらに

$$\tau \left(\frac{L/K}{\mathfrak{P}_0} \right) \tau^{-1} = \sigma \iff \tau \in \text{Cent}_{\text{Gal}(L/K)}(\sigma)$$

となる (ここで $\text{Cent}_{\text{Gal}(L/K)}(\sigma)$ は $\text{Gal}(L/K)$ の σ による中心化群). よって,

$$G_{\mathfrak{P}_0} = \{ \sigma \in \text{Gal}(L/K) \mid \mathfrak{P}_0^\sigma = \mathfrak{P}_0 \}$$

を分解群とするとき,

$$\text{Cent}_{\text{Gal}(L/K)}(\sigma)/G_{\mathfrak{P}_0} \ni \tau \mapsto \mathfrak{P}_0^\tau \in \{ \mathfrak{P} \in T_{L,\sigma} \mid \mathfrak{P} \cap \mathcal{O}_K = \mathfrak{p}_0 \}$$

は全単射を与える. いま $G_{\mathfrak{P}_0} = \langle \sigma \rangle$ であり, その位数は f である. また

$$\text{Gal}(L/K)/\text{Cent}_{\text{Gal}(L/K)}(\sigma) \ni \tau \mapsto \tau\sigma\tau^{-1} \in C$$

は全単射なので $\text{Cent}_{\text{Gal}(L/K)}(\sigma)$ の位数は f であることがわかる. ゆえに

$$[\text{Cent}_{\text{Gal}(L/K)}(\sigma) : G_{\mathfrak{P}_0}] = [L : K] \cdot f^{-1} \cdot c^{-1}$$

である. よって, 各 $\mathfrak{p} \in T_{K,\sigma}$ に対し, \mathfrak{p} の上の素 ideal $\mathfrak{P} \in T_{L,\sigma}$ が丁度 $[L : K] \cdot f^{-1} \cdot c^{-1}$ 個存在することがわかる. (証明終わり)

Chebotarev の密度定理の証明: 上の補題の (2) により $T_{M,\sigma} \ni \mathfrak{q} \mapsto \mathfrak{q} \cap \mathcal{O}_K \in T_{K,\sigma}$ は $[L : K] \cdot f^{-1} \cdot (\#C)^{-1} : 1$ 写像であり, $\mathfrak{q} \in T_{M,\sigma}$ に対し $N_{M/K}\mathfrak{q} = \mathfrak{p}$ なので $N\mathfrak{q} = N\mathfrak{p}$. ゆえに

$$\sum_{\mathfrak{p} \in T_{K,\sigma}} \frac{1}{N\mathfrak{p}^s} = \frac{f \cdot \#C}{[L : K]} \sum_{\mathfrak{q} \in T_{M,\sigma}} \frac{1}{N\mathfrak{q}^s} \sim \frac{f \cdot \#C}{[L : K]} \cdot \frac{1}{f} \log \frac{1}{s-1} = \frac{\#C}{[L : K]} \cdot \log \frac{1}{s-1}$$

であることより Chebotarev の密度定理が従う.

2 Fontaine-Mazur 予想と保型形式に伴う Galois 表現

この節では“幾何的な Galois 表現”は必ず代数多様体の étale cohomology の部分商として得られるだろうということを主張する Fontaine-Mazur 予想についてはじめに紹介し, その後で保型形式に付随する Galois 表現との関連について見ていく. そして最後に (Deligne による) 楕円保型形式に付随する Galois 表現の構成の概略について説明を行う.

2.1 幾何的な Galois 表現と Fontaine-Mazur 予想

K を代数体とし, k を \mathbb{Q}_p の有限次拡大体とする. ここでは G_K の連続な作用を持つ k 上の有限次元線形空間のことを Galois 表現と呼ぶことにする. この節では次のような問題を考えることにする.

- (1) Galois 表現は (同型の差を除いて) どのくらいたくさんあるか?

- (2) 実際に非自明な Galois 表現が構成できるか?
 (3) (構成できた場合) それはどのような性質をもつか?

G_K の構造が直接わかるわけではないので, そもそも G_K の表現を作ること自体が非自明な問題である. 従って, 上で述べたような問いに答えるのはそう易しくはないことがわかる. 二つ目の問いに対しては K 上の (滑らかな射影) 代数多様体 X に対し étale cohomology $H_{\text{ét}}^*(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_p)$ を考えることで機械的に Galois 表現を構成することができる. このとき $V = H_{\text{ét}}^*(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_p)$ への G_K への作用は次のような性質を持つ:

- (1) 有限個の素点を除き V は不分岐, つまりほとんど全ての素点で $V^{I_v} = V$ (但し, $I_v = \text{Gal}(\bar{K}/K^{\text{ur}})$ は v での惰性群) となる (実は代数多様体 X が素点 v で良い還元を持てば v では不分岐).
 (2) 全ての $v|p$ で $V|_{G_{K_v}}$ は potentially semistable (Faltings, 辻, Niziol + de Jong).

但し, V が p を割る素点 v で potentially semistable であるとは K_v の有限次拡大 E が存在して,

$$\dim_{E_0} (V \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{\text{st}})^{G_E} = \dim_{\mathbb{Q}_p} V$$

を満たすことであつた (E_0 は E に含まれる \mathbb{Q}_p の最大の不分岐拡大).

注 2.1 上の事実よりもっと強く K_v の有限次拡大体 L があつて X は L 上で “local” に semistable 還元を持つだろうと予想されている (ある種の特異点解消定理と思うこともできる). この予想から potentially semistable 性が導かれることがわかるが, 実は de Jong によって示された semistable 還元予想の弱い version (alteration の存在) から potentially semistable 性が示される.

一般の Galois 表現の class を考えるのは広すぎるので次の様なある程度性質の良い Galois 表現の class を考えることにする.

定義 2.2 (幾何的な Galois 表現) G_K の連続な作用を持つ \mathbb{Q}_p 上の有限次元線形空間 V が次の二つの性質を満たすとき幾何的 (geometric) であるという:

- (1) V は有限個の素点を除き不分岐.
 (2) 全ての素点で V は potentially semistable ¹.

注 2.3 p を割らない素点 v で V が potentially unipotent (つまりある K_v の有限次拡大体 E が存在して, E の惰性群 I_E が V に unipotent に作用しているとき) V は v で potentially semistable であるという. Grothendieck の monodromy 定理により任意の Galois 表現は p を割らない素点 v で常に potentially semistable であることが知られているので幾何的 Galois 表現の定義の (2) における, 「全ての素点で potentially semistable」という条件は「 p を割る素点で potentially semistable」という条件に置き換えても同値である.

先に述べたことから V が代数多様体の étale cohomology から得られる場合は V は幾何的である.

次の予想は初めの問いに対して一つの答えを与えてくれる.

¹ p を割らない素点で potentially semistable であるということの定義は次の注を参照のこと.

予想 2.4 (Fontaine-Mazur 予想 [9]) V を G_K の作用を持つ \mathbb{Q}_p 上の有限次元線形空間とする. このとき V が既約で幾何的ならば, ある K 上の滑らかで射影的な代数多様体 X とある整数 i, r が存在して, V は $H_{\text{ét}}^i(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_p)(r)$ のある部分商と同型になる.

Galois 表現が potentially abelian のときは上の予想が実際に成立することを Fontaine-Mazur の論文では示している.

2.2 Fontaine-Mazur 予想と保型形式に付随する Galois 表現

次に保型形式に付随する Galois 表現との関係を見ていく. 楕円保型形式に付随する Galois 表現の存在に関しては次の事実が知られている (cf. [29], [30], [6], [8], [25]).

定理 2.5 (Eichler, Shimura, Deligne, Deligne-Serre, Scholl) k, N を 1 以上の整数とし, χ を mod N の Dirichlet 指標とする.

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f) e^{2\pi i n z} \in S_k(\Gamma_0(N), \chi)_{\mathbb{C}}$$

を normalized Hecke eigenform とする. このとき $G_{\mathbb{Q}}$ の作用を持つ $\mathbb{Q}_p(\{a_n(f)\}_{n \geq 1})$ 上の 2 次元線形空間 V_f が存在して以下の性質を満たす:

- (1) V_f は既約で Np を割らない素点では不分岐. さらに $k = 1$ の場合は p でも不分岐.
- (2) V_f は odd な Galois 表現. つまり $c \in G_{\mathbb{Q}}$ を複素共役とするととき, $\det(c|V_f) = -1$ となる.
- (3) Np を割らない素数 ℓ に対し $\det(1 - \text{Frob}_{\ell} \cdot X|V_f) = 1 - a_{\ell}(f)X + \ell^{k-1}\chi(\ell)X^2$ を満たす.
- (4) (Scholl) $k \geq 2$ と仮定する. このとき $V|_{G_{\mathbb{Q}_p}}$ は de Rham 表現. さらに p が N を割らないとき $V|_{G_{\mathbb{Q}_p}}$ は crystalline 表現となる.

注 2.6 (1) この定理に現れる V_f のことを保型形式 f に付随する Galois 表現という.

- (2) 後で説明するように Deligne [6] は affine modular 曲線上の普遍楕円曲線から作られる sheaf を係数とする parabolic (étale) cohomology を用いて Galois 表現の構成を行った. Scholl [25] はより具体的に久賀-佐藤多様体と呼ばれる代数多様体 (定義は後で述べる) を用いて保型形式に対応する (Grothendieck) motive を構成し, その p 進 realization が上で述べた Galois 表現を与えることを証明した. 上記の定理の(4)の性質は Scholl による構成から従う事実であり, その意味で Deligne の構成よりも “強い” といえる. 特に Deligne や Scholl の構成法により保型形式に伴う Galois 表現は幾何的であることがわかる.
- (3) 志村 [30] は重さが $k \geq 2$ の保型形式を重さが 2 の保型形式の列で p 進的に近似できることを示した. このことから定理の(3)の性質を満たす Galois 表現の存在が重さ 2 の場合に帰着される. しかし, この構成法からは以下で述べる Ramanujan 予想 (Deligne により Galois 表現の存在と同時に証明された) などは示すことはできない. この意味で Deligne の構成は志村による構成よりも “強い” 構成を与えているといえる.

あとで詳しく述べるように Deligne による Galois 表現の構成は幾何的な強い構成であることから (Deligne によって証明された) Weil 予想を使うことで ℓ での Frobenius の特性多項式 (= ℓ での Euler 因子) の根の絶対値を決定することができる. この事実から Ramanujan 予想が従うことがわかる.

系 2.7 (Ramanujan 予想, [6]) $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f)e^{2\pi inz} \in S_k(\Gamma_0(N), \chi)_{\mathbb{C}}$ を normalized newform とする. このとき任意の素数 $\ell \nmid N$ に対し $|a_{\ell}(f)| \leq 2\ell^{\frac{k-1}{2}}$ が成立する. つまり $\alpha_{\ell}, \beta_{\ell}$ を $X^2 - a_{\ell}(f)X + \chi(\ell)\ell^{k-1} = 0$ の根とすると $|\alpha_{\ell}| = |\beta_{\ell}| = \ell^{\frac{k-1}{2}}$ が成立する.

注 2.8 Ramanujan による original の予想は

$$f(z) = \Delta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n)e^{2\pi in} = e^{2\pi iz} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{2\pi inz})^{24} \in S_{12}(\Gamma_0(1))_{\mathbb{C}}$$

の場合についての予想であった. この予想に関しては久賀道郎氏, 佐藤幹夫氏, 志村五郎氏及び伊原康隆氏らの仕事により, Weil 予想から Ramanujan 予想が導かれることが知られており², 最終的に Deligne が Weil 予想を証明すると同時に Ramanujan 予想も解決したことになる.

実は以下で述べるように 2 次元の幾何的 Galois 表現は全て上で述べたような保型形式に伴う Galois 表現として得られると予想されている.

予想 2.9 (Fontaine-Mazur [9]) E を p 進体とする. V を $G_{\mathbb{Q}}$ の作用を持つ E 上の 2 次元線形空間とし, V は既約で幾何的とする. さらに V は Artin 表現 (つまり像が有限であるような表現) の Tate twist にはなっていないと仮定する. このとき, ある正の整数 $k \geq 2, N \geq 1$, 指標 $\chi: (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^{\times} \rightarrow \mathbb{C}^{\times}$ と整数 $i \in \mathbb{Z}$ に対し, normalized Hecke eigenform $f \in S_k(\Gamma_0(N), \chi)$ が存在して $V \cong V_f(i)$ となる.

注 2.10 (1) この予想については Taylor, Kisin, Khare-Wintenberger ([34], [14], [13]) などの最近の研究により解決に向けて大きな進展があった.

(2) 上の予想では Artin 表現の場合が扱われていないが, odd な Artin 表現は重さが 1 の保型形式に伴う Galois 表現として得られることが知られている (Khare-Wintenberger によって証明された Serre 予想から導かれる).

(3) 上の予想の仮定には odd という条件が付いていないが, 既約で幾何的な表現は必ず odd になるという部分も予想に含まれている. また, (totally) odd という条件は総実代数体上の幾何的 Galois 表現に対する性質であり, 一般の場合は成立しない条件である. 例えば虚二次体上の楕円曲線に付随する Galois 表現に対してはこの条件は成立しないことに注意する.

2.3 保型形式に付随する Galois 表現の構成

ここでは定理 2.5 で述べた保型形式に付随する Galois 表現の構成の概略について説明する. 初めに方針を述べておくと重さが 2 の時は modular 曲線の Jacobian の Tate 加群から

²例えば, 佐藤 [24] などを見よ.

得られる Galois 表現を Hecke 対応を用いて切り取ることで構成される. 重さが 2 よりも大きな場合は Deligne に従い, affine modular 曲線の parabolic cohomology を用いた方法を紹介する. より詳しいことに関しては斎藤 [23] や Conrad [5] を参照していただきたい.

2.3.1 modular 曲線

まずはじめに Galois 表現の構成に必要な modular 曲線について復習しておく

$$\mathcal{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$$

を上半平面とし, 正の整数 N に対して,

$$\Gamma_1(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{Z}) \mid a \equiv d \equiv 1, c \equiv 0 \pmod{N} \right\}$$

とおく. $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_1(N)$ と $z \in \mathcal{H}$ に対して $\gamma z = \frac{az+b}{cz+d}$ とおくと, これは $\Gamma_1(N)$ の上半平面 \mathcal{H} の上への作用を定める. この作用に関する上半平面 \mathcal{H} の商空間 $Y_1(N)(\mathbb{C}) = \Gamma_1(N) \backslash \mathcal{H}$ について考える. いま, 関手 $\mathcal{M}_1(N) : (\text{scheme}/\mathbb{Z}[1/N]) \rightarrow \text{Sets}$ を

$$\mathcal{M}_1(N)(S) = \{ E : \text{楕円曲線}/S \text{ と } P : S \rightarrow E : \text{section of exact order } N \text{ の組の同型類} \}$$

によって定める. $N \geq 4$ とする. このとき関手 $\mathcal{M}_1(N)$ はある $\mathbb{Z}[1/N]$ 上の smooth affine 曲線 $Y_1(N)$ によって表現される. $Y_1(N)(\mathbb{C})$ は $Y_1(N)$ の \mathbb{C} -valued point の集合とみなせる. $Y_1(N)$ を level $\Gamma_1(N)$ の affine modular 曲線と呼ぶ.

$X_1(N)(\mathbb{C}) = \Gamma_1(N) \backslash (\mathcal{H} \cup \mathbb{P}^1(\mathbb{Q}))$ は $Y_1(N)(\mathbb{C})$ に cusp を付け加えた compact 化となっている. $N \geq 5$ のとき, $X_1(N)(\mathbb{C})$ も $\Gamma_1(N)$ 構造を持つ広義楕円曲線の moduli として定義される $\mathbb{Z}[1/N]$ 上の曲線 $X_1(N)$ の \mathbb{C} -point の集合とみなすことができる. $X_1(N)$ を level $\Gamma_1(N)$ の modular 曲線と呼ぶ.

$N \geq 4$ のとき, $E_1(N) \rightarrow Y_1(N)$ を普遍楕円曲線とし, $Y_1(N) \xrightarrow{0} E_1(N)$ を zero section とする. このとき

$$\omega_{Y_1(N)} = 0^* \Omega_{E_1(N)/Y_1(N)}^1$$

とおく. また, $N \geq 5$ のとき $\bar{E}_1(N) \rightarrow X_1(N)$ を普遍広義楕円曲線とし,

$$\omega_{X_1(N)} = 0^* \Omega_{\bar{E}_1(N)/X_1(N)}^1$$

とおく. A を $\mathbb{Z}[1/N]$ -代数とする. このとき $k \geq 2$ に対し A を係数に持つ Katz の意味での保型形式の空間を

$$\begin{aligned} M_k(\Gamma_1(N), A) &= \Gamma(X_1(N)_A, \omega_{X_1(N)_A}^{\otimes k}), \\ S_k(\Gamma_1(N), A) &= \Gamma(X_1(N)_A, \omega_{X_1(N)_A}^{\otimes k-2} \otimes \Omega_{X_1(N)_A}^1) \end{aligned}$$

によって定義する. $A = \mathbb{C}$ のとき, Katz の意味での保型形式の空間は古典的な意味での保型形式の空間に一致する. $A = \mathbb{Z}[1/N]$ のときは単に $S_k(\Gamma_1(N))$ などと書くことにする.

2.3.2 Hecke 対応

関手 $\mathcal{T}_1(N, n) : (\text{Scheme}/\mathbb{Z}[1/N]) \rightarrow \text{Sets}$ を

$\mathcal{T}_1(N, n)(T) = \{\phi : E_1 \rightarrow E_2 : \text{次数 } n \text{ の有限平坦射と}$

$P : T \rightarrow E_1 : \text{exact order } N \text{ で } \langle P \rangle \cap \text{Ker } \phi = \mathcal{O}_{E_1} \text{ となるものの同型類}\}$

によって定める. $N \geq 4, n \geq 1$ のとき, 関手 $\mathcal{T}_1(N, n)$ はある有限平坦 scheme $T_1(N, n)$ によって表現される. $\bar{T}_1(N, n) \rightarrow X_1(N)$ を compact 化したものへの自然な拡張とする.

$$s, t : T_1(N, n) \rightarrow Y_1(N)$$

をそれぞれ $(E_1 \xrightarrow{\phi} E_2, P) \mapsto (E_1, P), (E_1 \xrightarrow{\phi} E_2, P) \mapsto (E_2, \phi(P))$ によって定める. $X_1(N)$ への拡張も再び s, t で書くことにする. s, t はそれぞれ

$$s_* : S_k(\Gamma_1(N)) = \Gamma(X_1(N), \omega_{X_1(N)}^{\otimes k-2} \otimes \Omega_{X_1(N)}^1) \rightarrow \Gamma(\bar{T}_1(N, n), \omega^{\otimes k-2} \otimes \Omega_{\bar{T}_1(N, n)}^1)$$

及び

$$t^* : \Gamma(\bar{T}_1(N, n), \omega^{\otimes k-2} \otimes \Omega_{\bar{T}_1(N, n)}^1) \rightarrow S_k(\Gamma_1(N))$$

を定める. このとき $T_n = s_* \circ t^*$ とおく (Hecke 作用素と呼ばれる). また $d \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$ に対し, 関手 $\mathcal{M}_1(N)$ に自然な作用が定まる. この作用が誘導する $S_k(\Gamma_1(N))$ の上への作用を $\langle d \rangle$ によって表すことにする (diamond 作用素と呼ばれる).

$T_k(\Gamma_1(N))_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}[T_n, \langle d \rangle | n \geq 1, d \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times] \subset \text{End}(S_k(\Gamma_1(N)))$ を Hecke algebra と呼ぶ.

2.3.3 重さが 2 の保型形式の場合

$J_1(N)$ を $X_1(N)$ の Jacobian とする. $T_p J_1(N) = \varprojlim J_1(N)[p^n](\overline{\mathbb{Q}})$ を $J_1(N)$ の Tate 加群という. $V_p J_1(N) = T_p J_1(N) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$ とおく.

定理 2.11 (Eichler-Shimura 同型 (cf. Shimura [29])) $N \geq 5$ と仮定する. このとき $T_2(\Gamma_1(N)) \otimes \mathbb{R}$ -加群の同型

$$H_1(X_1(N)_{\mathbb{C}}, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{R} \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\Gamma(X_1(N)_{\mathbb{C}}), \Omega_{X_1(N)_{\mathbb{C}}}^1, \mathbb{C})$$

が存在する.

この定理と cohomology の比較定理 (cf. 三枝 [17]) を用いることにより $V_p J_1(N)$ は rank 2 の自由 $T_2(\Gamma_1(N))_{\mathbb{Q}_p} (= T_2(\Gamma_1(N))_{\mathbb{Q}} \otimes \mathbb{Q}_p)$ -加群となることがわかる. $f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f) e^{2\pi i n z} \in S_2(\Gamma_1(N))_{\mathbb{C}}$ を normalized eigenform とし, $\mathbb{Q}(f) = \mathbb{Q}(\{a_n(f)\}_{n=1}^{\infty})$ とおくと, これは \mathbb{Q} の有限次拡大体となる. λ を p を割る $\mathbb{Q}(f)$ の素点とする. このとき環準同型 $T_2(\Gamma_1(N))_{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathbb{Q}(f)_{\lambda}$ を $T_n \mapsto a_n(f)$ によって定める. これを用いて

$$V_{f, \lambda} = V_p J_1(N) \otimes_{T_2(\Gamma_1(N))_{\mathbb{Q}_p}} \mathbb{Q}(f)_{\lambda}$$

と定義するとこれは $G_{\mathbb{Q}}$ の $\mathbb{Q}(f)_\lambda$ 係数の2次元表現を定める. $J_1(N)$ は N を割らない全ての有限素点で good reduction を持つので $V_{f,\lambda}$ も Np を割らない全ての有限素点で不分岐であることがわかる. $\ell \nmid N$ のとき, $\text{Frob}_\ell : J_1(N)(\overline{\mathbb{F}}_\ell) \rightarrow J_1(N)(\overline{\mathbb{F}}_\ell)$ を arithmetic Frobenius とし, $\text{Frob}_{\text{geom}} : J_1(N)_{\mathbb{F}_\ell} \rightarrow J_1(N)_{\mathbb{F}_\ell}$ を geometric Frobenius とする. $\det(1 - \text{Frob}_\ell \cdot X | V_p J_1(N))$ は整数係数多項式になり, Weil 予想 (この場合は Weil によって証明されている) によりその根の絶対値は $\ell^{\frac{1}{2}}$ になる. また, ℓ で不分岐であることから

$$\det(1 - \text{Frob}_\ell \cdot X | V_p J_1(N)) = \det(1 - \text{Frob}_{\text{geom}} \cdot X | V_p J_1(N)_{\mathbb{F}_\ell})$$

もわかる. Galois 表現の構成で鍵となるのは次の合同関係式である. 実際, 合同関係式を示す部分が最も hard な部分と言える.

定理 2.12 (合同関係式 (cf. Shimura [29])) $T_\ell = \text{Frob}_{\text{geom}} + \langle \ell \rangle \text{Frob}_{\text{geom}}^*$ が成り立つ. ここで $\text{Frob}_{\text{geom}}^*$ は $\text{Frob}_{\text{geom}}$ の dual (Verschiebung と呼ばれる) から誘導される写像を表す.

合同関係式から

$$(1 - \text{Frob}_{\text{geom}} \cdot X)(1 - \langle \ell \rangle \text{Frob}_{\text{geom}}^* \cdot X) = 1 - T_\ell \cdot X + \langle \ell \rangle \text{Frob}_{\text{geom}} \text{Frob}_{\text{geom}}^* \cdot X^2$$

であり, さらに $\text{Frob}_{\text{geom}} \text{Frob}_{\text{geom}}^* = \ell$ となる. ゆえに

$$\det(1 - \text{Frob}_{\text{geom}} \cdot X) \det(1 - \langle \ell \rangle \text{Frob}_{\text{geom}}^* \cdot X) = (1 - T_\ell \cdot X + \langle \ell \rangle \ell \cdot X^2)^2$$

となることがわかる. しかし

$$\det(1 - \langle \ell \rangle \text{Frob}_{\text{geom}}^* \cdot X) = \det(1 - \text{Frob}_{\text{geom}} \cdot X)$$

となることがわかるので結局

$$\det(1 - \text{Frob}_{\text{geom}} \cdot X) = (1 - T_\ell \cdot X + \langle \ell \rangle \ell \cdot X^2)$$

が得られる. ゆえに $V_{f,\lambda}$ が f に付随する Galois 表現を与えることがわかる.

2.3.4 重さが2より大きい保型形式の場合

以下 $N \geq 4$ と仮定する. $f : E_1(N) \rightarrow Y_1(N)$ を普遍楕円曲線とする. このとき $R^q f_* \mathbb{Q}_p = (\varprojlim R^q f_* \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q}_p$ とおき, さらに $\mathcal{F}_p^{k-2} = \text{Sym}^{k-2} R^1 f_* \mathbb{Q}_p$ と書くことにする. このとき \mathcal{F}_p^{k-2} は $Y_1(N)$ 上の smooth p -adic sheaf を与える. 同様に $\mathcal{F}^{k-2} = \text{Sym}^{k-2} R^1 f_* \mathbb{Q}$ と書くことにする.

$$W_p^k(N) = H_{\text{par}}^1(Y_1(N)_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathcal{F}_p^{k-2}) := \text{Im}[H_c^1(Y_1(N)_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathcal{F}_p^{k-2}) \rightarrow H^1(Y_1(N)_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathcal{F}_p^{k-2})]$$

を parabolic cohomology と呼ぶ. ここで $H_c^1(Y_1(N)_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathcal{F}_{k-2})$ は compact support 付き cohomology を表す. また同様に

$$W^k(N) = H_{\text{par}}^1(Y_1(N)(\mathbb{C}), \mathcal{F}^{k-2}) := \text{Im}[H_c^1(Y_1(N)(\mathbb{C}), \mathcal{F}^{k-2}) \rightarrow H^1(Y_1(N)(\mathbb{C}), \mathcal{F}^{k-2})]$$

とおく.

定理 2.13 (Eichler-Shimura 同型 (cf. Deligne [6])) $T_k(\Gamma_1(N)) \otimes \mathbb{C}$ -加群としての同型

$$W^k(N) \otimes \mathbb{C} \rightarrow S_k(\Gamma_1(N))_{\mathbb{C}} \oplus \overline{S_k(\Gamma_1(N))_{\mathbb{C}}}$$

が存在する. 但し $\overline{S_k(\Gamma_1(N))_{\mathbb{C}}} = \{\overline{f(z)} \mid f \in S_k(\Gamma_1(N))_{\mathbb{C}}\}$ は anti-holomorphic な保型形式の空間を表す.

この結果と比較定理より $W_p^k(N)$ が階数 2 の自由 $T_k(\Gamma_1(N)) \otimes \mathbb{Q}_p$ -加群であることが従う.

$f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f) e^{2\pi i n z} \in S_k(\Gamma_1(N))_{\mathbb{C}}$ を normalized Hecke eigenform とし,

$$\mathbb{Q}(f) = \mathbb{Q}(\{a_n(f)\}_{n=1}^{\infty})$$

とおくと, 重さが 2 の場合と同様に $\mathbb{Q}(f)$ は \mathbb{Q} の有限次拡大体となる. λ を p を割る $\mathbb{Q}(f)$ の素点とする. このとき環準同型 $T_k(\Gamma_1(N))_{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathbb{Q}(f)_{\lambda}$ を $T_n \mapsto a_n(f)$ によって定め, これを用いて

$$V_{f,\lambda} = W_p^k(N) \otimes_{T_k(\Gamma_1(N))_{\mathbb{Q}_p}} \mathbb{Q}(f)_{\lambda}$$

と定義するとこれは $G_{\mathbb{Q}}$ の $\mathbb{Q}(f)_{\lambda}$ 係数の 2 次元表現を定める. $V_{f,\lambda}$ も Np を割らない全ての有限素点で不分岐であることがわかる.

重さが 2 以上の場合の Galois 表現の構成の重要な step はやはり次の合同関係式を示す部分である.

定理 2.14 (合同関係式 (cf. Deligne [6])) ℓ を Np を割らない素数とするととき

$$T_{\ell} = \text{Frob}_{\text{geom}} + \langle \ell \rangle \text{Frob}_{\text{geom}}^*$$

が成り立つ.

この合同関係式から重さが 2 の場合と同様に $V_{f,\lambda}$ が f に付随する Galois 表現を与えていることが証明できる.

最後に Deligne の構成から何故 Ramanujan 予想が導かれるかということについてもう少し詳しく述べておく. $N \geq 5$ とし, $\overline{E}_1(N)^{k-2}$ を $X_1(N)$ 上の普遍広義楕円曲線 $\overline{E}_1(N)$ の $X_1(N)$ 上 $k-2$ 回 self fiber product をとったものとし, $\overline{\overline{E}_1(N)^{k-2}}$ を $\overline{E}_1(N)^{k-2}$ の (Deligne による) canonical desingularization とする (この代数多様体は久賀-佐藤多様体と呼ばれている). このとき $V_{f,\lambda}$ は $H^{k-1}(\overline{\overline{E}_1(N)^{k-2}}, \mathbb{Q}_p)$ の部分商として現れることがわかる. Weil 予想によって ℓ での Frobenius の $H^{k-1}(\overline{\overline{E}_1(N)^{k-2}}, \mathbb{Q}_p)$ への作用に関する固有値の絶対値は $\ell^{\frac{k-1}{2}}$ であるから, $V_{f,\lambda}$ の特性多項式の根も絶対値が $\ell^{\frac{k-1}{2}}$ であることがわかる. いま, $V_{f,\lambda}$ の Frobenius の特性多項式が f の ℓ での Euler 因子に等しいことから Ramanujan 予想が従うことがわかる.

3 Galois 表現から定まる L 関数

ここでは代数体の Galois 表現に対して L 関数を定義して, 特にその Galois 表現が幾何的な場合, 特に (射影的で滑らかな) 代数多様体の étale cohomology から得られる場合にはどのような解析的性質を持つと期待されているかについて説明する. 最初に motive や代

数多様体のétale cohomology から得られる Galois 表現に対して Euler 因子や L 関数の定義を行ったのは Serre [28] である. 後で述べるように Serre は Euler 因子の持つ性質に関して基本的な予想を提出し, さらに Euler 因子の積をとって定義される global な L 関数の関数等式の形に関し, Galois 表現から定まる様々な不変量を用いて予想を定式化した. また Serre の論文が出た当時は p 進 Hodge 理論などはまだ登場していなかったため特に p 進 Galois 表現に対して “ $\ell = p$ ” での Euler 因子などはどのように定義すれば良いかなどは知られていなかったが現在では p 進 Hodge 理論の言葉を用いて定義することができるようになったことを注意しておく.

3.1 L 関数の定義

K を代数体, E を \mathbb{Q}_p の有限次拡大体とし, 埋め込み $\overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}$ をひとつ固定する.

定義 3.1 (Galois 表現の Euler 因子) V を G_K の連続な作用を持つ E 上の線形空間とする. このとき K の素点 v に対し, E 係数の多項式 $P_v(V, T)$ を

$$P_v(V, T) := \begin{cases} \det(1 - \text{Frob}_v^{-1} \cdot T | V^{I_v}) & (v \nmid p \text{ のとき}), \\ \det(1 - \varphi^{[K_{v,0}:\mathbb{Q}_p]} \cdot T | D_{\text{cris}}(V)) & (v | p \text{ のとき}) \end{cases}$$

によって定義する. 但し I_v は v での惰性群であり, $K_{v,0}$ は K_v に含まれる \mathbb{Q}_p の最大の不分岐拡大体, $D_{\text{cris}}(V) := (B_{\text{cris}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_{K_v}}$, φ は Frobenius を表す.

V が幾何的ならある代数体 $F (\subset E)$ があって, 全ての有限素点 v に対して, $P_v(V, T) \in \mathcal{O}_F[T]$ となると予想されている (\mathcal{O}_F は F の整数環). $V = H_{\text{ét}}^i(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p)$ の場合であれば, ほとんどの v でこのことは成立する. いま V の L 関数を形式的に

$$L(V, s) := \prod_{v:\text{有限素点}} P_v(V, Nv^{-s})^{-1}$$

と定義する.

例 3.2 $V = \mathbb{Q}_p(r)$ とする. $\ell \neq p$ のとき, Frob_ℓ^{-1} の $\mathbb{Q}_p(r)$ への作用は ℓ^{-r} 倍で与えられる. よって, このときは

$$P_\ell(V, T) = (1 - \ell^{-r} \cdot T)$$

となる. $\ell = p$ のときも $P_p(V, T) = (1 - p^{-r} \cdot T)$ となる. ゆえに, このときは

$$L(V, s) = \prod_{\ell:\text{素数}} (1 - \ell^{-r-s})^{-1} = \zeta(s+r)$$

となる ($\zeta(s)$ は Riemann の ζ 関数).

例 3.3 E を \mathbb{Q} 上の楕円曲線とする. 素数 p に対して

$$\begin{aligned} T_p E &:= \varprojlim E[p^n], \\ V_p E &:= T_p E \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p \end{aligned}$$

と定義する. $V = (V_p E)^* := \text{Hom}(V_p E, \mathbb{Q}_p) \cong H_{\text{ét}}^1(E_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathbb{Q}_p)$ とおく. はじめに E は ℓ で良い還元を持つと仮定する. このとき $\ell \neq p$, $\ell = p$ のいずれの場合も

$$P_\ell(V, T) = 1 - a_\ell(E)T + \ell T^2$$

となる. 但し, $a_\ell(E) := 1 + \ell - \#E(\mathbb{F}_\ell)$ とおいた. E は ℓ で悪い還元を持つときは

$$P_\ell(V, T) = \begin{cases} 1 - T & E \text{ が } \ell \text{ で分裂乗法的還元を持つとき,} \\ 1 + T & E \text{ が } \ell \text{ で非分裂乗法的還元を持つとき,} \\ 1 & E \text{ が } \ell \text{ で加法的還元を持つとき} \end{cases}$$

となる.

3.2 Galois 表現の導手

以下では, 簡単のため \mathbb{Q}_ℓ 係数の有理数体の絶対 Galois 群 $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ の表現についてのみ考えるが, より一般に, \mathbb{Q}_ℓ の代わりに \mathbb{Q}_ℓ の有限次拡大体, $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ の代わりに代数体 K の絶対 Galois 群 $\text{Gal}(\overline{K}/K)$ に置き換えて考えても同様である.³

3.2.1 不変量 ε, δ, f

ℓ と p を互いに異なる素数とし, V を次元 d の \mathbb{Q}_ℓ 上の線形空間とする. ℓ 進 Galois 表現

$$\rho : G_{\mathbb{Q}_p} = \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p) \longrightarrow \text{Aut}_{\mathbb{Q}_\ell}(V) \simeq \text{GL}_d(\mathbb{Q}_\ell)$$

に対して, ρ の (Artin) 導手の指数を次の様に定義する.

不変量 ε

Galois 表現 V に対し

$$\varepsilon = \text{codim} V^I = d - \dim V^I$$

とおく. 定義から, $\varepsilon = 0$ と $I = I_p$ の作用は自明であることは同値である.

不変量 δ

Grothendieck の定理より, I のある開部分群 I' が存在して, $\rho(I')$ の元はすべて冪単 (unipotent) である. 以下, 適当に I' の開集合をとることで, I' は normal であると仮定してよい. 整数 $n \geq 0$ に対して,

$$V_n = \{x \in V \mid (\rho(g) - 1)^n x = 0 \text{ for } \forall g \in I'\}$$

とおくと, $\{V_n\}_n$ は V に, 増大する filtration を定め, 各 V_n は I' が I の中で normal であることから, I の作用で安定である. また, $n \gg 0$ のとき, $V_n = V$ である. さらに Lie-Kolchin の定理 (cf. p.135, 定理 7 [32]) から, $\rho(I)$ は (一様に) 上三角化されることがわかる.

次に, V の次数化

$$\text{gr} V = \bigoplus_{n=0}^{\infty} V_n / V_{n+1}$$

³Notation の都合上ここからは ℓ と p の使い方を今までとは逆にさせていただく.

を考える. I の作用は, 有限商 $\Phi = I/I'$ を経由することがわかる. $\rho(I)$ は (一様に) 上三角化され, $\rho(I')$ の固有値はすべて 1 なので,

$$\mathrm{Tr}_\rho : \Phi \longrightarrow \mathbb{Q}_\ell, g \mapsto \mathrm{trace}(\rho(g))$$

は well-defined である.

$K_\Phi/\mathbb{Q}_p^{\mathrm{unr}}$ を Φ に対応する, $\mathbb{Q}_p^{\mathrm{unr}}$ の有限次拡大とする ($I = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p^{\mathrm{unr}})$ に注意). v_Φ を K_Φ の正規化された付値 (\mathbb{Z} に値をとる) とし, t を K_Φ の素元とする (つまり $v_\Phi(t) = 1$ なる K_Φ の元のこと). 次の関数 b_Φ を考える:

$$b_\Phi(g) = 1 - v_\Phi(g(t) - t), g \in \Phi \setminus \{1\}, b_\Phi(1) = - \sum_{g \neq 1} b_\Phi(g).$$

関数 b_Φ は Φ の Swan 指標と呼ばれる. 実際, 関数 b_Φ は Φ の指標になっている (cf. [27]).

不変量 δ は二つの指標 b_Φ と Tr_ρ の scalar 積によって定義される:

$$\delta = \langle \mathrm{Tr}_\rho, b_\Phi \rangle = \frac{1}{\#\Phi} \sum_{g \in \Phi} \mathrm{Tr}_\rho(g) b_\Phi(g).$$

δ は I' の取り方に依らず, さらに整数となることが知られている. $\delta = 0$ であることと, wild-part $I^w = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p^{\mathrm{tame}}) (\subset I)$ が $\mathrm{gr} V$ に自明に作用することは同値である. それは結局, I の V への作用が unipotent である, つまり, Grothendieck の意味で semi-stable であることと同じである.

不変量 f

上で見たように, $\rho = \rho_p : G_{\mathbb{Q}_p} \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$ が与えられたら, $\varepsilon = \varepsilon(\rho)$, $\delta = \delta(\rho)$ が定まる. この二つの不変量を用いて,

$$f = f(\rho) := \varepsilon + \delta$$

とおき, これを ρ の導手の指数と呼ぶ.

3.2.2 $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ の ℓ 進表現の導手

V を次元 d の \mathbb{Q}_ℓ 上の線形空間とする. 有限個の素数を除いて, 不分岐な ℓ 進 Galois 表現

$$\rho : G = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}_\ell}(V) \simeq \mathrm{GL}_d(\mathbb{Q}_\ell)$$

に対して, ρ の (Artin) 導手を次の様に定義する. 各素数 $p \neq \ell$ に対して, $\rho|_{G_{\mathbb{Q}_p}}$ の導手の指数を f_p とするとき,

$$N = N(\rho) := \prod_{p \neq \ell} p^{f_p}$$

を ρ の Artin 導手という. 定義より N は ℓ と素な正の整数である.

3.2.3 代数多様体に付随する ℓ 進表現の導手

p と ℓ を異なる素数とする. X を \mathbb{Q}_p 上定義された次元 d の非特異射影的代数多様体とする. 整数 $m \geq 0$ に対して, $V_\ell := H_{\text{ét}}^m(X_{\overline{\mathbb{Q}_p}}, \mathbb{Q}_\ell)$ とおく. $G_{\mathbb{Q}_p} = \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ は V_ℓ に連続に作用し, 表現 ρ_ℓ を得る. このとき以下のような予想が自然に導かれる (Serre [28] による).

予想 (C₃) ρ_ℓ から定まる不変量 ε, δ, f は ℓ に依らない.

δ に関してはより正確なことが予想されている:

予想 (C₄) $\text{Tr} \rho_\ell|_{I_p}$ は \mathbb{Z} に値をとり, かつ ℓ に依らない.

$P(V_\ell, T) = \det(1 - T \cdot \text{Frob}_p^{-1}|_{V_\ell^{I_p}})$ を幾何的 Frobenius Frob_p^{-1} の $V_\ell^{I_p}$ への作用の固有多項式とする (T は変数).

予想 (C₅, ℓ -非依存性) $P(V_\ell, T)$ は \mathbb{Z} 係数の多項式であり, ℓ に依らない.

予想 C₅ を仮定すると, $P(V_\ell, T)$ は ℓ に依らないので, 適当に ℓ を 1 つとって

$$P(T) := P(V_\ell, T)$$

とおく. \mathbb{C} 上でこの多項式を分解しておく:

$$P(T) = \prod_{i=1}^{r-\varepsilon} (1 - \alpha_i T)$$

ここで, $r = \text{rank}_{\mathbb{Q}_\ell} V_\ell$ とおいた. この値も ℓ に依らない. また, $\varepsilon = r - \dim_{\mathbb{Q}_\ell} V_\ell^{I_p}$ であったことに注意する.

予想 (C₆) すべての α_i に対し, ある整数 $m(\alpha_i)$, $0 \leq m(\alpha_i) \leq m$ が存在して, $|\alpha_i| = p^{\frac{m(\alpha_i)}{2}}$ が成り立つ.

予想 (C₇) $\varepsilon = 0$ (不分岐な場合) のとき, $m(\alpha_i) = m$.

注 3.4 予想 C₅, C₆, C₇ は Frobenius 写像の作用に関することなので, つまり $G_{\mathbb{Q}_p}$ の $V_\ell^{I_p}$ への作用に関する予想であると考えられる. I_p の固定化部分に制限しない場合は次の予想がある.

予想 (C₈) $g \in G_{\mathbb{Q}_p}$ を $G_{\mathbb{Q}_p}/I_p = \text{Gal}(\overline{\mathbb{F}_p}/\mathbb{F}_p)$ に送ると, 幾何的 Frobenius Frob_p^{-1} の冪に対応しているような元とする. このとき, $\rho_\ell(g)$ の V_ℓ への作用の固有多項式は \mathbb{Q} 係数であり, ℓ によらない.

X が v で良い還元を持つ場合, これらの予想は Weil 予想から従う. 特に予想 C₆ において $m(\alpha_i) = m$ となる. X が悪い還元を持つときは一般には未解決であるが次のようなことが知られている.

- (1) (Grothendieck) $m \leq 1$ であれば予想 C₅ が成立する. これは Abel 多様体の Néron model を用いることで証明される.

- (2) 予想 C_6 に関しては $|\alpha_i| = p^{\frac{m(\alpha_i)}{2}}$ を満たすような整数 $m(\alpha_i)$, $0 \leq m(\alpha_i) \leq 2m$ が存在することが Weil 予想, de Jong の alteration と weight spectral sequence を用いて証明されている. さらに weight monodromy 予想を仮定すると予想 C_6 が言えることも証明されている. $m \leq 2$ ならば weight monodromy 予想は証明されているので予想 C_6 は $m \leq 2$ のときは証明されていることになる. また, weight monodromy 予想は X が 久賀-佐藤多様体や志村曲線上の久賀-佐藤多様体の類似の場合 (Saito [20], [22]) や X が p で p 進一意化を持つような場合 (cf. Ito [12]) については証明されており, その場合の予想 C_6 も証明されていることになる. weight monodromy 予想については本報告集の三枝氏の論説 [17] にて詳しく解説されているので是非参照していただきたい.
- (3) 斎藤毅氏の結果により予想 C_5 は Tate 予想の一部と weight monodromy 予想から導かれることが分かっている (Saito [21]).

X を \mathbb{Q} 上の滑らかな代数多様体とし, $V = H_{\text{ét}}^m(X_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathbb{Q}_\ell)$ とおく. また, X に対し悪い還元を持つ素点の集合を S とおく. Weil 予想から特に次のことがわかる.

定理 3.5 $V = H_{\text{ét}}^m(X_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathbb{Q}_\ell)$ のとき

$$L^S(V, s) = \prod_{p \notin S} P_p(V, p^{-s})^{-1}$$

は $\text{Re}(s) > \frac{m}{2} + 1$ で絶対収束する.

一般に次のように予想されている.

予想 3.6 $V = H_{\text{ét}}^m(X_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathbb{Q}_\ell)$ のとき $L(V, s)$ は \mathbb{C} 上に有理型に解析接続される.

後で述べるように $L(V, s)$ の整数点における解析的性質 (極や零点の様子) には X の幾何的な性質 (代数的 cycle の情報) が反映すると予想されている.

3.3 mod ℓ 表現と ℓ 進表現の導手の関係

有限個の素数を除いて, 不分岐な ℓ 進 Galois 表現

$$\rho : G_{\mathbb{Q}} = \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \longrightarrow \text{Aut}(V) \simeq \text{GL}_n(\mathbb{Q}_\ell)$$

を考える. V の $G_{\mathbb{Q}}$ -stable な \mathbb{Z}_ℓ -格子 T をとる (このようなものはいつでも取ることができる). これより, mod ℓ 表現

$$\bar{\rho} : G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \text{Aut}(T) \xrightarrow{\pi} \text{Aut}(T/\ell T) \simeq \text{GL}_n(\mathbb{F}_\ell)$$

を得る (π は reduction map). $\bar{\rho}$ の像は有限群なので, 各素数 ℓ に対して, $K_\ell = \overline{\mathbb{Q}}^{\text{Ker } \bar{\rho}|_{I_\ell}}$ は \mathbb{Q} の有限次拡大である. あとは, K_Φ を K_ℓ に取り替えることで, 同様に, $N(\bar{\rho})$ が定義される. $N(\rho)$ と $N(\bar{\rho})$ の関係は以下のように与えられる.

定理 3.7 $N(\rho) = N(\bar{\rho}) \prod_{p \neq \ell} \ell^{\dim \bar{\rho}^{I_p} - \dim \rho^{I_p}}$.

証明. 表現を分解群 $G_p = \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ に制限し, 導手の指数について考察すればよい. I_p^w を wild inertia subgroup とすると, π の核は pro- ℓ 群なので, $\rho(I_p^w) \simeq \bar{\rho}(I_p^w)$ が成り立つ. 定理はこのことと導手の定義から従う. (証明終わり)

3.4 L 関数の関数等式についての予想

ここでは Serre [28] に従って Hasse-Weil L 関数の関数等式に関する予想の定式化を紹介する. X を代数体 K 上の滑らかで射影的な代数多様体とし, $V = H_{\text{ét}}^m(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_\ell)$ とおく. このとき無限素点における Γ 因子をそれぞれ

$$\begin{aligned}\Gamma_{\mathbb{R}}(s) &:= \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma(s/2), \\ \Gamma_{\mathbb{C}}(s) &:= \Gamma_{\mathbb{R}}(s) \Gamma_{\mathbb{R}}(s+1) = 2(2\pi)^{-s} \Gamma(s)\end{aligned}$$

と定義する⁴. $K \hookrightarrow \mathbb{C}$ を固定して, singular cohomology (Betti cohomology とも呼ばれる)

$$H_{\text{sing}}^m(X(\mathbb{C}), \mathbb{C}) = H_{\text{sing}}^m(X \times_{\text{Spec } K} \text{Spec } \mathbb{C}, \mathbb{C})$$

を考える. singular cohomology $H_{\text{sing}}^m(X(\mathbb{C}), \mathbb{C})$ は Hodge 分解

$$H_{\text{sing}}^m(X(\mathbb{C}), \mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=m} H^{p,q}(X)$$

を持つ (但し $H^{p,q}(X) = H^q(X, \Omega_{X/\mathbb{C}}^p)$ とおいた). このとき $h^{p,q} = \dim_{\mathbb{C}} H^{p,q}(X)$ とおく. また m が偶数のとき

$$H^{\frac{m}{2}, \pm}(X) := \{x \in H^{\frac{m}{2}, \frac{m}{2}}(X) \mid x^c = \pm x\}$$

(c は複素共役) とおき,

$$h^{\frac{m}{2}, \pm} := \dim_{\mathbb{C}} H^{\frac{m}{2}, \pm}(X)$$

と定義する. このとき,

$$L_{\infty}(V, s) := \begin{cases} \prod_{p < q} \Gamma_{\mathbb{C}}(s-p)^{h^{p,q}} & m \text{ が奇数の時,} \\ \prod_{p < q} \Gamma_{\mathbb{C}}(s-p)^{h^{p,q}} \cdot \Gamma_{\mathbb{R}}(s - \frac{m}{2})^{h^{\frac{m}{2}, +}} \cdot \Gamma_{\mathbb{R}}(s - \frac{m}{2} + 1)^{h^{\frac{m}{2}, -}} & m \text{ が偶数の時} \end{cases}$$

と定義する. N を $\text{Ind}_{G_K}^{G_{\mathbb{Q}}} V$ の Artin 導手, $d_{K/\mathbb{Q}}$ を K/\mathbb{Q} の判別式とするとき

$$A = N \cdot |d_{K/\mathbb{Q}}|^{\dim_{\mathbb{Q}} H_{\text{sing}}^m(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q})}$$

とおく. 最後に

$$\xi(V, s) := A^{s/2} L(V, s) L_{\infty}(V, s)$$

とおく. このとき次のような関数等式が成り立つと期待されている.

予想 3.8 (関数等式, [28]) $\xi(V, s)$ は \mathbb{C} 上に有理型に解析接続され, 関数等式

$$\xi(V, s) = w \cdot \xi(V, m+1-s)$$

を満たす (但し $w = \pm 1$).

⁴この Γ 因子の定義は Deligne [7] による. ここで用いた定義は Serre [28] のものとは若干異なるが L 因子の basechange との compatibility という観点からすれば Deligne の定義の方が自然である

注 3.9 (1) 関数等式の予想に現れる関数等式の符号 $w = \pm 1$ も実は ε -因子の計算により予想することができる (Deligne [7]). 例えば m が偶数のときは斎藤毅氏の結果 [19] により $w = 1$ でなければならないことが証明されている.

(2) 代数多様体の L 関数の関数等式の中心における零点の位数に関する Beilinson と Bloch の予想 (cf. [1]) によれば m が奇数の時は

$$\text{ord}_{s=k} L(H^m(X_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathbb{Q}_\ell), s) = \text{rank}_{\mathbb{Z}} \text{CH}^{\frac{m+1}{2}}(X)_0$$

となると予想されているので関数等式の符号は

$$w = (-1)^{\text{rank}_{\mathbb{Z}} \text{CH}^{\frac{m+1}{2}}(X)_0}$$

となることが予想される. ここで $\text{CH}^{\frac{m+1}{2}}(X)_0$ は homological に自明な cycle のなす Chow 群 $\text{CH}^{\frac{m+1}{2}}(X)$ の部分群を表す.

例 3.10 (1) $X = \text{Spec } \mathbb{Q} = \{1 \text{ 点}\}$ とする. $V = \mathbb{Q}_\ell = H_{\text{ét}}^0(X_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathbb{Q}_\ell)$ のとき

$$\xi(V, s) = \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma(s/2) \zeta(s)$$

であり, $\xi(V, s)$ は関数等式 $\xi(V, 1-s) = \xi(V, s)$ を満たす.

(2) E を \mathbb{Q} 上の楕円曲線とする. このとき $V = H_{\text{ét}}^1(E_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathbb{Q}_\ell)$ とおけば,

$$\xi(V, s) = 2N^{\frac{s}{2}} (2\pi)^{-s} \Gamma(s) L(E, s)$$

となる. 但し, N は楕円曲線 E の導手を表す. このとき, Wiles [36], Taylor-Wiles [33], Breuil-Conrad-Diamond-Taylor [2] らの結果により, 重さが 2, level N の保型形式 f が存在して, $L(V, s) = L(V_f, s)$ となる. このことより $\xi(V, s)$ は関数等式 $\xi(V, 2-s) = \pm \xi(V, s)$ を満たすことがわかる.

注 3.11 例えば V が二次元の Galois 表現の時, V が保型形式に伴う Galois 表現に一致することが分かれば, 関数等式の予想を満たすことがわかる. 上の (2) の例は実際にその方針で証明された結果である. より高次元でも保型形式に伴う Galois 表現が構成されている場合があり, 関数等式などの解析的性質も知られている場合がある⁵. Galois 表現に伴う L 関数の解析接続や関数等式の予想を証明するには今のところ modularity 予想を示す道のりしか知られていないようである.

3.5 Artin 予想

ここでは山内氏の稿で紹介された Artin 表現に対して L 関数を定義し, その L 関数の正則性に関する Artin 予想について述べる. K を代数体とし, V を G_K の連続な作用を持つ \mathbb{C} 上の n 次元線形空間とする. このような V から得られる表現

$$\rho : G_K \rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{C}}(V) \cong \text{GL}_n(\mathbb{C})$$

⁵例えば GL_n の保型表現に伴う (標準) L 関数の関数等式は Godement-Jacquet [10] により示されている.

のことを Artin 表現と呼ぶのであった。さらに山内氏の稿で述べられているように Artin 表現の像は必ず有限となる。Artin 表現 ρ に対し、その L 関数を

$$L(\rho, s) := \prod_{v:K \text{ の有限素点}} \det(1 - \text{Frob}_v \cdot Nv^{-s} | V^{I_v})^{-1}$$

と定義する。Artin 表現から得られる L 関数は Artin L 関数と呼ばれる。このとき誘導表現に関する Brauer の結果より $L(\rho, s)$ は Hecke 指標に付随する L 関数の積と商で表わされることがわかる。この事実により $L(\rho, s)$ は複素平面上に有理型に解析接続され、ある関数等式を満たすことが従う。 ρ が非自明で既約な場合には Artin は次のような予想を提出した。

予想 3.12 (Artin 予想) ρ を非自明かつ既約な Artin 表現とする。このとき $L(\rho, s)$ は全複素平面上に正則に解析接続される。

注 3.13 ρ が自明な場合は $L(\rho, s)$ は Riemann の ζ 関数に一致する。よく知られているように Riemann の ζ 関数は $s = 1$ で一位の極を持つので整関数ではない。また、 $n = 1$ の場合は対応する L 関数は類体論によって有限位数の Hecke 指標に付随する L 関数 ($K = \mathbb{Q}$ のときは Dirichlet の L 関数) と一致することがわかり、Hecke 指標に付随する L 関数は指標が非自明ならば正則に解析接続されることが知られているので、この場合は Artin 予想が成立することがわかる。

Artin 予想には次のような強い version がある⁶。

予想 3.14 (強 Artin 予想) ρ を非自明かつ既約な Artin 表現とする。このとき $\text{GL}_n(\mathbb{A}_K)$ の尖点的な保型表現 π が存在して、 $L(\rho, s) = L(\pi, s)$ となる。

Godement-Jacquet [10] により $\text{GL}_n(\mathbb{A}_K)$ の尖点的な保型表現 π に付随する L 関数 $L(\pi, s)$ は \mathbb{C} 上に正則に解析接続されることが知られているので、強 Artin 予想から Artin 予想が導かれることがわかる。 $n = 2$, $K = \mathbb{Q}$ で ρ が odd の場合の強 Artin 予想に関しては山内氏の解説でも述べられたように Langlands [15], Tunnell [35], Buzzard, Dickinson, Shepherd-Barron, Taylor [3] などの多くの先駆的研究の後、最終的に Khare と Wintenberger により、次の結果が証明された。

定理 3.15 (Khare-Wintenberger [13]) $\rho : G_{\mathbb{Q}} \rightarrow \text{GL}_2(\mathbb{C})$ を既約で odd な Artin 表現とする。このとき、ある重さが 1 の Neben-type 楕円尖点形式 f が存在して、 $L(\rho, s) = L(f, s)$ を満たす。特に、 $L(\rho, s)$ は \mathbb{C} 上に正則に解析接続される。

注 3.16 ρ が既約で even な 2 次元 Artin 表現の場合は $L(\rho, s)$ は Maass 形式に付随する L 関数に一致するだろうと予想されている。

謝辞 この原稿を読んで comment をしていただき、さらに多くの間違いを指摘し訂正していただきました落合理さん、山内卓也さん、加塩朋和さんにこの場を借りて感謝を述べさせていただきますと思います。

⁶これは Langlands の関手性予想の特別な場合である。

参考文献

- [1] S. Bloch, *Algebraic cycles and values of L-functions*, J. Reine Angew. Math. **350**, 1984, 94–108.
- [2] C. Breuil, B. Conrad, F. Diamond and R. Taylor, *On the modularity of elliptic curves over \mathbb{Q} : Wild 3-adic exercises*, J. Amer. Math. Soc. **14**, 2001, 843–939.
- [3] K. Buzzard, M. Dickinson, N. Shepherd-Barron and R. Taylor, *On icosahedral Artin representations*, Duke Math. J. **109**, 2001, no. 2, 283–318.
- [4] H. Carayol, *Formes modulaires et représentations galoisiennes à valeurs dans un anneau local complet*, in: “ p -adic monodromy and the Birch and Swinnerton-Dyer conjecture”, (Boston, MA, 1991), pp. 213–237, Contemp. Math. **165**, A.M.S., 1994.
- [5] B. Conrad, *Modular forms and the Ramanujan conjecture*, preprint.
- [6] P. Deligne, *Forms modulaires et représentations ℓ -adiques*, Sémin. Bourbaki **21**, (1969), no. 335, 139–172.
- [7] P. Deligne, *Les constantes des équations fonctionnelles des fonctions L*, in Modular functions of one variable II, Lecture notes in Math. **349**, 1973, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 501–597.
- [8] P. Deligne and J.-P. Serre, *Formes modulaires de poids 1*, Ann. Sci. École Norm. Sup.(4) **7**, 1974, 507–530.
- [9] J.-M. Fontaine and B. Mazur, *Geometric Galois representations*, Elliptic curves, modular forms, and Fermat’s last theorem (Hong Kong, 1993), Ser. Number Theory, I, Int. Press, Cambridge, MA, 1995, pp. 41–78.
- [10] R. Godement and H. Jacquet, *Zeta functions of Simple Algebras*, Lecture notes in Math. **260**, 1972, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York.
- [11] E. Hecke, *Über die L-Funktionen und den Dirichetschen Primzahlsatz für einen beliebigen Zahlkörper*, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl. (1917), 299–318; Mathematische Werke, 178–197. Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1957.
- [12] T. Ito, *Weight-monodromy conjecture for p -adically uniformized varieties*, Invent. Math. **159**, 2005, 607–656.
- [13] C. Khare and J.-P. Wintenberger, *Serre’s modularity conjecture (I)*, Invent. Math. **170**, 2009, 485–504.
- [14] M. Kisin, *The Fontaine-Mazur conjecture for GL_2* , J. Amer. Math. Soc. **21**, 2008, 641–690.

- [15] R. Langlands, *Base change for GL_n* , Annals of Math. Series, Princeton University-Press, 1980.
- [16] B. Mazur, *An introduction to the deformation theory of Galois representations*, in: “Modular forms and Fermat’s last theorem” (Boston, MA, 1995), G. Cornell, J. H. Silverman and G Stevens (eds.), Springer-Verlag, New York, 1997, 243–311.
- [17] 三枝 洋一, *エタールコホモロジーと ℓ 進表現*, 本報告集.
- [18] A. Ogg, *Elliptic curves and wild ramification*, Amer. J. Math. **89** (1967),1–21.
- [19] T. Saito, *The sign of functional equation of the L -function of an orthogonal motive*, Invent. Math. **120**, 1995, 119–142.
- [20] T. Saito, *Modular forms and p -adic Hodge theory*, Invent. Math. **129**, 1997, 607–620.
- [21] T. Saito, *Weight spectral sequences and independence of ℓ* , J. Inst. Math. Jussieu **2**, 2003, 583–634.
- [22] T. Saito, *Hilbert modular forms and p -adic Hodge theory*, Compos. Math. **145**, 2009, 1081–1113.
- [23] 斎藤 毅, *Fermat 予想 1,2*, 岩波書店.
- [24] 佐藤 幹夫, *佐藤幹夫の数学*, (木村達雄編), 190–204, 日本評論社.
- [25] A. Scholl, *Motive for modular forms*, Invent. Math. **100**, 1990, 419–430.
- [26] J-P. Serre, *数論講義*, 岩波書店.
- [27] J-P. Serre, *Local fields*, Springer.
- [28] J-P. Serre, *Facteurs locaux des fonctions zeta des varietes algebriques (definitions et conjectures)*, Seminaire Delange-Pisot-Poitou. Theorie des nombres, **11** no. 2 (1969-1970), Expose No. 19, 15 p.
- [29] G. Shimura, *Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions*, Princeton University Press.
- [30] G. Shimura, *An ℓ -adic method in the theory of automorphic forms*, (unpublished 1968), in Collected papers 1967–1977, 2002, 237–272.
- [31] P. Stevenhagen and H. W. Lenstra, Jr. *Chebotarëv and his Density Theorem*, The Mathematical Intelligencer, vol **18** No. 2, 1996, 26–37.
- [32] D. A. Suprunenko, *Matrix groups*, Translated from the Russian. Translation edited by K. A. Hirsch. Translations of Mathematical Monographs, Vol. 45. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1976.

- [33] R. Taylor and A. Wiles, *Ring theoretic properties of certain Hecke algebras* Ann. of Math. **141**, 1995, 553–572.
- [34] R. Taylor, *Remarks on a conjecture of Fontaine and Mazur*, J. Inst. Math. Jussieu, **1**, 2002, 1–19.
- [35] J. Tunnell, *Artin conjecture for representations of octahedral type*, Bull. Amer. Math. Soc. **5**, 1981, 173–175.
- [36] A. Wiles, *Modular elliptic curves and Fermat’s Last Theorem*, Ann. of Math. **141** 1995, 443–551.
- [37] 山内 卓也, *Galois 表現の基礎 I*, 本報告集.