ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur certains systèmes d'équations différentielles.* Note de M. **Halphen**, présentée par M. Hermite.

« Considérons en premier lieu, avec M. Brioschi [1], les trois équations simultanées à trois inconnues u_1, u_2, u_3 :

$$(1) \qquad \frac{d(u_r + u_s)}{d\alpha} = u_r u_s + \varphi(\alpha) \quad (r, s = 1, 2, 3).$$

» Je vais montrer qu'un changement de variables fait disparaître $\varphi(\alpha)$ et ramène ainsi ce système à celui que j'ai intégré dans ma Note du 9 mai dernier. Soit, à cet effet, une solution $f(\alpha)$ de l'équation

$$(2) \qquad 2f'(\alpha) = f^2(\alpha) + \varphi(\alpha);$$

posons

$$f(\alpha) = [\log F(\alpha)]'$$

et prenons de nouvelles variables β, v_1, v_2, v_3 :

$$(3) \qquad \beta = \int F(\alpha)\, d\alpha, \quad u_r = f(\alpha) + v_r F(\alpha).$$

» Substituant dans l'équation (1), on trouve, comme je l'ai annoncé,

$$\frac{d(v_r + v_s)}{d\beta} = v_r v_s \text{ [2]}.$$

» Pareille propriété appartient à une classe d'équations différentielles que je vais définir.

» Soient ψ_1, ψ_2, ..., ψ_n des formes quadratiques à n variables u_1, u_2, ..., u_n et dont les coefficients soient choisis de telle sorte que, si l'on y fait

$$u_1 = u_2 = \ldots = u_n = \mathrm{U},$$

on ait alors

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial u_1} = \frac{\partial\psi_2}{\partial u_2} = \frac{\partial\psi_3}{\partial u_3} = \cdots = \frac{\partial\psi_n}{\partial u_n} = 2\lambda \mathrm{U},$$

---

[1] Voir le présent *Compte rendu*, p. 1389.

[2] Ce système d'équations différentielles a été rencontré par M. Darboux dans son beau Mémoire sur la théorie des coordonnées curvilignes (*Annales de l'École Normale*, 2e série, t. VII, p. 149). Sachant maintenant l'intégrer, on pourra achever la solution du problème géométrique envisagé par le savant géomètre.

et qu'en même temps les autres dérivées du premier ordre soient toutes nulles.

» Envisageons les n équations différentielles simultanées,

$$\frac{du_r}{d\alpha} = \psi_r(u_1, u_2, \ldots, u_n) + \varphi(\alpha) \quad (r = 1, 2, \ldots, n).$$

C'est là le système dont il s'agit. Voici sa propriété. Déterminons $f(\alpha)$ par l'équation

$$f'(\alpha) = \lambda f^2(\alpha) + \varphi(\alpha),$$

posons

$$2\lambda f(\alpha) = [\log F(\alpha)]'$$

et faisons le changement de variables (3). Les équations transformées sont

$$(4) \qquad \frac{dv_r}{d\beta} = \psi_r(v_1, v_2, \ldots, v_n) \quad (r = 1, 2, \ldots, n),$$

comme la substitution directe le fait immédiatement reconnaître.

» Ce qu'il importe d'observer, c'est la propriété d'invariance dont jouissent les équations (4). Supposant en effet $\varphi(\alpha) = 0$ et prenant pour β son expression la plus générale, on reconnaît que les équations (4) se reproduisent sans altération si l'on fait

$$\beta = \frac{a\alpha + b}{a'\alpha + b'}, \quad u_r = -\frac{a'}{\lambda(a'\alpha + b')} + \frac{ab' - ba'}{(a'\alpha + b')^2} v_r.$$

» De tels systèmes d'équations différentielles se rattachent directement à la théorie des équations linéaires du second ordre. Cette liaison, M. Brioschi l'a reconnue pour le cas particulier que j'avais mentionné isolément à cause de sa forme simple et de son intégrale remarquable; mais c'est justement à cause de cette liaison que j'ai envisagé de tels systèmes. J'y trouve, en effet, le moyen de généraliser l'équation de Gauss sous la forme la plus commode. Pour aujourd'hui, je vais considérer seulement le cas général de trois équations ayant la forme (4). Les voici, sous leur forme réduite,

$$(5) \qquad \begin{cases} u'_1 = a_1 u_1^2 + (\lambda - a_1)(u_1 u_2 + u_1 u_3 - u_2 u_3), \\ u'_2 = a_2 u_2^2 + (\lambda - a_2)(u_2 u_3 + u_2 u_1 - u_3 u_1), \\ u'_3 = a_3 u_3^2 + (\lambda - a_3)(u_3 u_1 + u_3 u_2 - u_1 u_2). \end{cases}$$

» C'est à ce système que j'ai fait allusion à la fin de ma dernière Note;

il s'intègre par les fonctions hypergéométriques X, Y, Z. Je vais le montrer d'une manière encore indirecte, mais très simple.

» Pour abréger, je ne reproduis pas ici la définition des fonctions X, Y, Z et j'emploie les mêmes notations que dans ma Communication du 4 avril (ce Volume, p. 856). Si l'on traite ces fonctions comme des polynômes entiers ayant pour degrés respectifs $-\frac{\mu}{m}$, $-\frac{\mu}{n}$, $-\frac{\mu}{p}$, et que, à ce point de vue, on forme des covariants, on prouve aisément que ces covariants s'expriment par les fonctions elles-mêmes. Pour les jacobiens et les hessiens, on trouve notamment

$$pXZ' - mZX' = (-1)^{\frac{1}{m}} pY^{n-1}, \quad mYX' - nXY' = (-1)^{\frac{1}{m}} pZ^{p-1},$$
$$\frac{\mu}{p} ZZ'' - \left(\frac{\mu}{p} + 1\right) Z'^2 = (-1)^{\frac{2}{m}} \left(\frac{\mu}{p} + 1\right) X^{m-2} Y^{n-2}.$$

De ces trois équations je tire la suivante :

$$p\frac{Z''}{Z} = \left(\frac{1}{\mu} + \frac{1}{p}\right)\left(np\frac{Z'}{Z}\frac{Y'}{Y} + mp\frac{Z'}{Z}\frac{X'}{X} - mn\frac{X'}{X}\frac{Y'}{Y}\right).$$

En permutant m, n, p et X, Y, Z, on obtient deux équations analogues.

» L'identité d'un tel système avec les équations (5) est évidente; mais, comme μ est lié à m, n, p par la relation

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} = 1 - \frac{2}{\mu},$$

l'intégration du système (5) se fait ainsi :

» *Désignons par* Φ_1, Φ_2, Φ_3 *les trois fonctions* $m\frac{X'}{X}$, $n\frac{Y'}{Y}$, $p\frac{Z'}{Z}$, *et prenons*

$$m = \frac{a_1 + a_2 + a_3 - 2\lambda}{a_1}, \quad n = \frac{a_1 + a_2 + a_3 - 2\lambda}{a_2}, \quad p = \frac{a_1 + a_2 + a_3 - 2\lambda}{a_3};$$

l'intégrale générale du système (5) *est*

$$u_r = -\frac{a'}{\lambda(a'\alpha + b')} + \frac{ab' - ba'}{(2\lambda - a_1 - a_2 - a_3)(a'\alpha + b')^2}\Phi_r\left(\frac{a\alpha + b}{a'\alpha + b'}\right).$$

» Quand les nombres m, n, p sont entiers et positifs, les fonctions Φ sont uniformes à l'intérieur d'un cercle dont j'ai donné le rayon. Observons encore que, si les nombres m, n, p sont m, 2, 2, ou 2, 3, 3, ou 2, 3, 4, ou 2, 3, 5, les fonctions Φ sont rationnelles. »