変形理論からみた Riemann-Hilbert 問題
〜Painleve 方程式入門〜

2005 年 7 月 8 日

モノドロミ可解な Painlevé 函数

2005 年 7 月 9 日

大山 陽介

大阪大学情報科学研究科

Encounter with Mathematics 第 34 回
非線型の特殊函数論

1. 特殊函数

1.1 **特殊函数**とは何か？

1. **計算可能**である
2. 数理科学にさまざまな**応用**をもつ

計算可能とは？

1. 微分（差分・函数）方程式を満たす
2. 積分表示される
3. （漸近）展開級数表示がある
4. 大域的性質がわかる

参考書：Whittaker-Watson, Courant-Hilbert, 寺沢寛一, M-O

1.2 **初等函数**（J. Liouville 1836）

代数函数、指数函数、対数函数から四則、代入などの操作によって得られる函数全体

例）楕円積分、誤差積分

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}, \qquad \int \exp(-x^2)dx$$

などは初等函数ではない

1-3. Gauss-Euler の超幾何函数

$$
\begin{aligned}
F(a,b,c;x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n n!} x^n \\
&= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)(b)_n}{\Gamma(c+n) n!} x^n \\
&= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \sum_{n=0}^{\infty} B(a+n, c-a)(b)_n \frac{x^n}{n!} \\
&= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{c-a-1} \sum_{n=0}^{\infty} (b)_n \frac{t^n x^n}{n!} dt
\end{aligned}
$$

積分表示

$$
F(a,b,c;x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}(1-tx)^{-b} dt
$$

近接関係式

$$
\begin{aligned}
U(a) &:= x\frac{d}{dx} + a \\
D(a) &:= x(1-x)\frac{d}{dx} + (c-a-bx)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
U(a)F(a,b,c;x) &= aF(a+1,b,c,x) \\
D(a)F(a,b,c;x) &= (c-a)F(a-1,b,c,x)
\end{aligned}
$$

超幾何方程式

$$
D(a+1)U(a)F = a(c-a-1)F
$$

2. 超幾何から Painlevé へ

$\mathbb{CP}^n$ の上の多価函数 $z_0^{\alpha_0} z_1^{\alpha_1} \cdots z_n^{\alpha_n}$ を直線 $z_j = a_j t_0 + b_j t_1$ で積分

$$\int (a_0 t_0 + b_0 t_1)^{\alpha_0} \cdots (a_n t_0 + b_n t_1)^{\alpha_n} (t_1 dt_0 - t_0 dt_1)$$

することで超幾何函数を得る（$\sum \alpha_j = -2$）

$$Gr(2, n+1) : \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_n \\ b_0 & b_1 & \cdots & b_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} & \mathrm{Flag}(1,2,n+1) = \{l^1 \subset L^2 \subset V^{n+1}\} & \\ \swarrow & & \searrow \\ Gr(2,n+1) & & \mathbb{CP}^n \end{array}$$

$\boxed{\text{Painlevé 方程式は非可換超幾何方程式}}$

	Gauge Field	特殊化
line bundle	Maxwell	超幾何
vector bundle	Yang-Mills	Painlevé

特殊化：超幾何の場合

$$z_0^{\alpha_0} z_1^{\alpha_1} \cdots z_n^{\alpha_n} \text{ の積分}$$

$$\Downarrow$$

$Gr(2, n+1)$, $\mathrm{Flag}(1, 2, n+1)$, $\mathbb{P}^n$ への右 G-作用
ただし、G は対角行列（極大アーベル群）

特殊化：Painlevé の場合

z_j 成分の vector 束の変形 $z_j \to c_j z_j$

$$\nabla_j = z_j \frac{\partial}{\partial z_j} - A_j(z),$$

作用が可換なので

$$[\nabla_j, \nabla_k] = 0$$

∇ は $\mathbb{CP}^3 \setminus \{z_j \neq z_k\}$ の上の integrable connection

∇ を line: $z_j = a_j \zeta - b_j$ に制限する:

$$\frac{d}{d\zeta}\Psi = \sum_{j=1}^{4} \frac{a_j A_j}{a_j \zeta - b_j}\Psi.$$

$\nabla|_{\mathrm{line}}$ の Monodromy は global monodromy からくるので
line を微小変形しても Monodromy 不変

3 Painlevé equations

$$
\begin{aligned}
\text{R1)}\quad y'' &= \alpha(y^3+3ty)+3\beta(y^2+t),\\
\text{R2)}\quad y'' &= \frac{1}{2y}{y'}^2+\frac{3}{2}y^3+4ty^2+2(t^2-\alpha)y+\frac{\beta}{y},\\
\text{T1)}\quad y'' &= \frac{1}{y}{y'}^2-\frac{y'}{t}+\frac{\alpha y^2+\beta}{t}+\gamma y^3+\frac{\delta}{y},\\
\text{T2)}\quad y'' &= \left(\frac{1}{2y}+\frac{1}{y-1}\right){y'}^2-\frac{1}{t}y'+\frac{(y-1)^2}{t^2}\left(\alpha y+\frac{\beta}{y}\right)\\
&\qquad +\gamma\frac{y}{t}+\delta\frac{y(y+1)}{y-1},\\
\text{E)}\quad y'' &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{y-1}+\frac{1}{y-t}\right){y'}^2-\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{t-1}+\frac{1}{y-t}\right)y'\\
&+\frac{y(y-1)(y-t)}{t^2(t-1)^2}\left[\alpha-\beta\frac{t}{y^2}+\gamma\frac{t-1}{(y-1)^2}+\left(\frac{1}{2}-\delta\right)\frac{t(t-1)}{(y-t)^2}\right]
\end{aligned}
$$

注意 1

R: Rational type ($t=\infty$ が特異点)

T: Trigonometric type ($t=0,\infty$ が特異点)

E: Elliptic type ($t=0,1,\infty$ が特異点)

注意 2

(R1) $\alpha=0 \Longrightarrow y''=6y^2+t$ (PI)

(R1) $\alpha\neq 0 \Longrightarrow y''=2y^3+ty+\alpha$ (PII)

(T1), (T2) は (t,y) のスケール変換あり

(T1) 3 タイプ (δ,γ) : $(\neq 0,\neq 0),\ (0,\neq 0),\ (0,0)$

(T2) $\beta=\delta=0$ のときは求積可能

(T2) $\gamma=0$ のときは (T1) に帰着

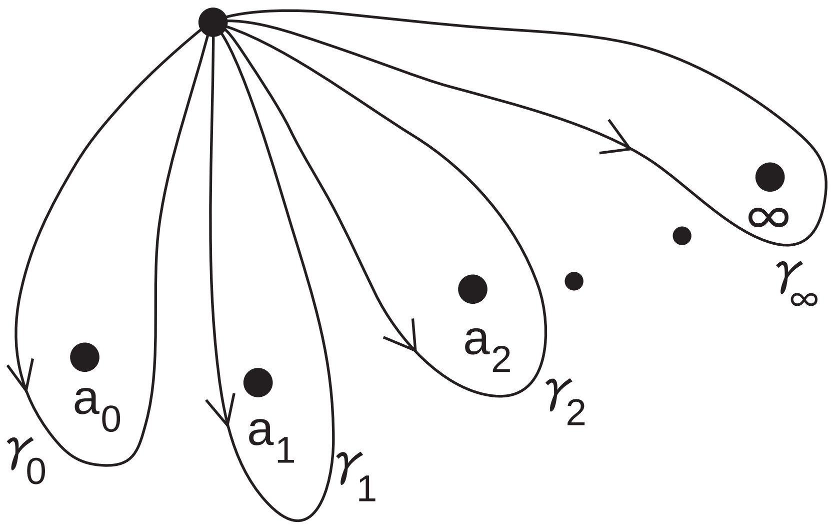
(T2) $\gamma=\delta=0$ のときは求積可能

4. モノドロミと変形理論

4.1 モノドロミ

$$\frac{dY}{dz} = \left(\frac{A_0}{z-a_0} + \frac{A_1}{z-a_1} + \cdots + \frac{A_n}{z-a_n} \right) Y$$

A_j: $m \times m$ 行列



定義 γ_j にそって基本解 $Y(z)$ を解析接続したとき

$$Y(\gamma_j \cdot z) = Y(z) M_j$$

となる正則行列 $\{M_0, M_1, \cdots, M_\infty\}$ を **モノドロミ行列** という

関係式

$$M_\infty M_n \cdots M_1 M_0 = 1$$

$\{A_0, A_1, \cdots, A_n\}$ から $\{M_0, M_1, \cdots, M_n\}$ への対応は
'ほぼ一対一'

注意）モノドロミ行列は「基本解」に対して定まる

例１）$n=1, m=2$: Gauss 超幾何函数

$$F(a,b,c;x)=\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}F(a,b,1+a+b-c;1-x)$$
$$+\frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}(1-x)^{c-a-b}F(c-a,c-b,1-a-b+c;1-x)$$
$$(\ |\arg(x)|<\pi, |\arg(1-x)|<\pi\ )$$

基底の置き換え

$$\Psi(a,b,c;x):=\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(c)}F(a,b,c;x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)}{\Gamma(c+n)\Gamma(1+n)}x^n$$

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= \Psi(a,b,c;x)\\
f_2(x) &= x^{1-c}\Psi(a+1-c,b+1-c,2-c;x)\\
g_1(x) &= \Psi(a,b,a+b+1-c;1-x)\\
g_2(x) &= (1-x)^{c-a-b}\Psi(c-a,c-b,1+c-a-b;1-x)
\end{aligned}$$

＜新しい接続公式＞

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= C\,(g_1(x)-g_2(x))\\
f_2(x) &= C\,(A\cdot g_1(x)-g_2(x))
\end{aligned}$$

$$A=\frac{\sin a\pi\sin b\pi}{\sin(c-a)\pi\sin(c-b)\pi}$$

$$C=\frac{\pi}{\sin(c-a-b)\pi}\frac{1}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}$$

問題
計算可能ならモノドロミは古典数で表現されるか?

Painleve 方程式のルーツ

1) 動く特異点を持たない方程式 (Painleve 1898-)

2) モノドロミ保存変形 (R. Fuchs 1905)

3) 不完全楕円積分 (Picard 1889)

最初の応用

1) 波動散乱 (Myers 1962)

2) Ising 模型 (Barouch-McCoy-Wu 1972)

モノドロミ保存変形 Schlesinger 方程式

$$\frac{\partial A_j}{\partial a_k} = \frac{[A_j, A_k]}{a_j - a_k} \quad (j \neq k)$$

を満たすとき、モノドロミデータは $\{a_0, a_1, ..., a_n\}$ によらない

例２）$n = 2, m = 2$: Painlevé VI

$a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = t$ とすると Painlevé VI

$$\frac{dA_0}{dt} = \frac{[A_2, A_0]}{t}, \quad \frac{dA_1}{dt} = \frac{[A_2, A_1]}{t-1}$$

$$-(A_0 + A_1 + A_1) =: A_\infty = \mathrm{diag}(\kappa_1, \kappa_2)$$

モノドロミ不変だが、モノドロミ自体は不明

Schlesinger 方程式は

$$(*)\quad \frac{\partial}{\partial a_j}Y(x)=-\frac{A_j}{x-a_j}Y(x)$$

の可積分条件より従うので、$(*)$ を示す

証明）基本解の $x=a_j$ での展開

$$\begin{aligned} Y(x;a_j)= &\ Y_j(x)(x-a_j)^{L_j}, && Y_j(x)=O((x-a_j)^0) \\ Y(x;\infty)= &\ Y_\infty(x)x^{L_\infty}, && Y_\infty(x)=1+O(1/x) \end{aligned}$$

を x で微分すると

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}Y(x;a_j)Y(x;a_j)^{-1} &= \frac{d}{dz}Y_j(x)Y_j(x)^{-1}+\frac{L_j}{x-a_j}Y_j(x)Y_j(x)^{-1} \\ &= Y_j(a_j)L_jY_j(a_j)^{-1}\frac{1}{x-a_j}+O((x-a_j)^0) \end{aligned}$$

もとの方程式と比較して

$$A_j=Y_j(a_j)L_jY_j(a_j)^{-1}$$

今度は a_j で微分すると L_j は a_j によらないことから

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a_j}Y(x;a_l)Y(x;a_l)^{-1} &= \frac{\partial}{\partial a_j}Y_l(x)Y_l(x)^{-1} \quad (l\neq j) \\ &= O((x-a_j)^0) \\ \frac{\partial}{\partial a_j}Y(x;a_j)Y(x;a_j)^{-1} &= \frac{\partial}{\partial a_j}Y_j(x)Y_j(x)^{-1}-\frac{L_j}{x-a_j}Y_j(x)Y_j(x)^{-1} \\ &= -Y_j(a_j)L_jY_j(a_j)^{-1}\frac{1}{x-a_j}+O((x-a_j)^0) \\ \frac{\partial}{\partial a_j}Y(x;\infty)Y(x;\infty)^{-1} &= \frac{\partial}{\partial a_j}Y(x;\infty)Y(x;\infty)^{-1} \\ &= O(1/x) \end{aligned}$$

より、留数定理により

$$\frac{\partial}{\partial a_j}Y(x)Y(x)^{-1}=-\frac{A_j}{x-a_j}$$

（証明終）

4.2 Riemann-Hilbert 問題

(1) **Riemann** (1858):

与えられたモノドロミをもつ方程式を求めよ

H. A. Schwarz による超幾何の代数解の分類

(2) **Hilbert** (1900)

単位円内・円外の行列値函数の接続 ⇒ 積分方程式に帰着

(3) **Schlesinger** (1902)

変形理論を用いた構成（$||A_j|| \to \infty$ の評価）

(4) **Lappo-Danilevski** (1928)

モノドロミ・データから hyperlog で直接構成

Riemann-Hilbert 問題は超越的には解ける

4.3 モノドロミを求めるとは ??

(1) 積分表示がある
(2) 既知方程式から変換で求まる
(3) その他の幾何的構造 (Picard-Fuchs 方程式) をもつ
(4) WKB 法による発散級数表示

モノドロミ可解＝何らかの意味で計算可能

現時点で Painleve 関連で知られているモノドロミ可解な例

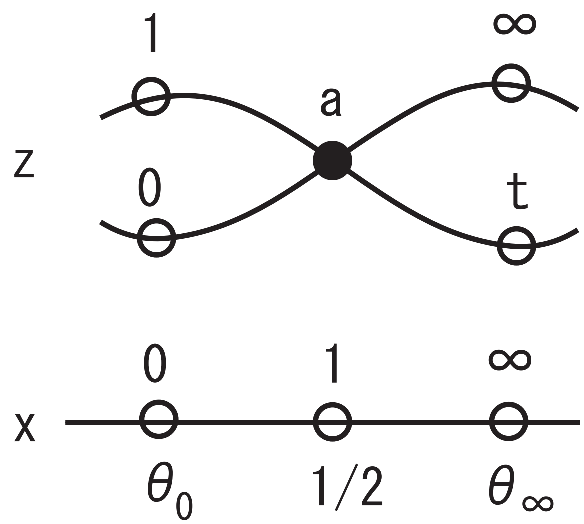
- **超幾何**に帰着
- **楕円函数**に帰着（Picard の解）

いずれの場合も、モノドロミ・データは **梅村の古典数**

4.4 超幾何に帰着する場合の例 (Kitaev)

$$x = \rho\frac{z(z-1)}{z-t}, \quad x-1 = \rho\frac{(z-a)^2}{z-t}$$

となるように、$a = a(t),\ \rho = \rho(t)$ をえらぶ



超幾何方程式

$$\frac{dY}{dx} = \left(\frac{A_0}{x-1} + \frac{A_1}{x-1}\right)Y$$

$$\mathrm{tr}\ A_j = 0,\ A_0 + A_1 = -\mathrm{diag}(\nu/2, -\nu/2)$$

において

$$\det A_1 = -1/16$$

とすれば、z に関する線型方程式は $z = 0, 1, t, \infty$ に特異点を持つ。

超幾何方程式：アクセサリパラメタなし
有理変換（有限被覆）

$\Downarrow$

Painleve VI の代数解

適当な標準化のもとで **P6 の梅村解**をえる

$$y = t + \sqrt{t^2 - t}$$

4.4 楕円函数に帰着する場合 (Picard-R. Fuchs)

VI $(0,0,0,0)$ の一般解は

$$y = \wp(a\omega_1 + b\omega_2; \omega_1, \omega_2) + \frac{x+1}{3}$$

$$\omega_j = \int_{\gamma_j} \frac{dt}{\sqrt{t(t-1)(t-x)}}$$

証明)

不完全楕円積分

$$z = \int_y^\infty \frac{dt}{\sqrt{t(t-1)\,(t-x)}}.$$

の逆函数 $y(z,x)$ の満たす微分方程式を考え、$z = a\omega_1(x) + b\omega_2(x)$ を代入（計算は長い）

モノドロミ可解性

解の具体形がわかっているので、

$t \to 0, t \to 1$ **の極限をとると超幾何に帰着**

第1回終わり

1. Painleve **の友人** Poincaré

H. Poincaré

数学は一つの大陸を作っている。そこでは、それぞれの国はおたがいにうまく関係するように配置されている。しかしながら、Painleve の仕事は独創的ですばらしいが、絶海の孤島である。

Les Mathématiques constituent un continent solidement agencé, dont tous les pays sont bien reliés les uns aux autres; l'oeuvre de Paul Painlevé est une île originale et splendide dans l'océan voisin.

しかし、Poincaré の **Zeta Fuchs 級数**の研究は、
まさに Riemann-Hilbert 問題そのものであった

2.1 Painleve 函数とモノドロミデータ

＜昨日の復習＞

・Painleve 函数 $y(t)$ の方程式の特異点 $t \to 0$ での境界値

　特異点の合流による reduction （Picard）

・超幾何方程式からの**有理変換** (**Kitaev**)

　Painleve 方程式の代数解の構成

> **参考： R. Fuchs の問題** (1910)
> Painlevé 函数が代数的のとき、線型方程式は独立変数の変換によって変形パラメタを含まない形にできる。

R. Fuchs は Picard 解の 3,4,6 等分点の場合に証明

＜そのほかの方法＞

・Painleve 函数 $y(t)$ で t を**特殊な値**におく

　特別な値で線型モノドロミを計算

・Painleve 函数 $y(t)$ の不確定特異点 $t = \infty$ での**展開係数**

　Boutroux 解＋s exp 項

> **指導原理 （Schlesinger, Garnier）**
> **Riemann-Hilbert 問題を解くには変形理論が有効**

Painleve 函数はモノドロミデータを知っている

特殊値・境界値・漸近展開

2.2 Boutroux 解

P1) $y'' = 6y^2 + t$

$y'' \sim 0$ とすると $y \sim \sqrt{-t/6}$

$$y_0 = \sqrt{-t/6}\sum_{n=0}^{\infty} a_n (-t)^{-2k/5} \quad (t \to -\infty)$$

モノドロミ保存変形

$$\frac{dY}{dx} = \begin{pmatrix} -z & 2x^2 + 2yx + t + 2y^2 \\ 2(x-y) & z \end{pmatrix} Y, \quad \frac{dY}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & x+2y \\ 1 & 0 \end{pmatrix} Y$$

Stokes データ ∞ での Stokes 行列 (j= 0, 1, 2, 3, 4):

$$G_{2j} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s_{2j} & 1 \end{pmatrix}, \quad G_{2j-1} = \begin{pmatrix} 1 & s_{2j-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$1 + s_k s_{k+1} = -i s_{k+3} \qquad \text{（実質 2 パラメタ）}$$

定理（Kapaev）

1) $y_0(t)$ に対して $(s_0, s_1, s_2, s_3, s_4) = (0, i, i, i, 0)$

2) $x \to -\infty$ のとき

$$y = y_0(t) + s_4 C_1 (-x)^{-1/8} \exp\left(C_2(-x)^{5/4}\right)(1 + O(x^{-3/8}))$$

に対して、$(s_0, s_1, s_2, s_3, s_4) = (0, i - s_4, i, i, s_4)$

証明は **WKB 法**を用いる（Airy 函数による近似）

$y_0(t)$ は 1/5-sector で意味を持つ。

隣の領域に延長すると exp 項がつく（非線型 Stokes 問題）

河合・青木・竹井の **1-instanton 解**にあたる

2-parameter 解の構成は難しい

2.3 Ablowits-Segur 解

P2) $y'' = 2y^3 + ty + \alpha$

$\alpha = 0, y \sim 0$ とすると $y'' \sim ty$ (Airy)

$$y_1(t) \sim \mathrm{Ai}(t) \quad (t \to \infty)$$

$\alpha = 0, y'' \sim 0$ とすると

$$y_0 \sim \sqrt{-t/2} \quad (t \to -\infty)$$

この二つは一致する（Ablowitz-Segur）

証明は直接的にもできるが、WKB 法を使うと

$$y_1(t) \sim s\mathrm{Ai}(t) \quad (t \to \infty)$$

の場合にも証明できて、Stokes 係数がわかる（s： Stokes 係数）

3 モノドロミ可解な Painleve 函数

> **定義**
> Painlevé 函数が**モノドロミ可解**
> $\Longleftrightarrow$ 変形方程式が**モノドロミ可解**

例）P6 の Picard 解
例）P1 の Boutroux 解
例）P2 の Ablowitz-Segur 解
例）古典解はモノドロミ可解（知られているものは正しい）
例）P1, P2, P4, P3, P6 の対称解（Kitaev、金子、奥村）
古典解：Bäcklund 変換の固定点
対称解：$\mathbb{Z}_n$-作用の固定点
注）古典解は特殊なパラメタのみ。対称解は任意パラメタ
例）P3, P5, P6 の原点での Briot-Bouquet 解（奥村、金子）

> **予想**
>
> (線型) モノドロミは変形方程式によらない
> Painlevé 函数固有の性質

例）Painlevé II の Flaschka-Newell 表示と Miwa-Jimbo 表示

線型方程式の立場から

- 特異点が一般の位置にあるときはモノドロミ計算不能
- 特異点が**対称**な位置、**合流**すると可解
- 係数に関する漸近展開（**WKB 法**）で可解系に近似

3.1 梅村の古典解（特殊解）

根本的問題「Painlevé 函数は超越的か？」
解答 I 型の場合 YES （西岡）

梅村の古典解＝代数解＋ Riccati 解

例 Painleve II

$$y'' = 2y^3 + ty + \alpha$$

・$\alpha = 0$： $y = 0$ は**有理解**.

$$\begin{cases} q' = -q^2 + p - \frac{t}{2}, \\ p' = 2pq + \alpha_1. \qquad (\alpha = \alpha_1 - 1/2) \end{cases}$$

・$\alpha_1 = 0$ のとき $p = 0$ として

$q' = -q^2 - \frac{t}{2}$： **the Riccati equation**.

梅村の古典解は全てモノドロミ可解（だろう）

定理（Jordan） Fuchs 型線型方程式の解が全て代数的ならば、有理変換によって 1 階方程式に分解する

Schwarz の代数解の場合、**Goursat の変換**によって 1 階に分解

・P6 の **代数解**の場合、R. Fuchs の問題が肯定的に解ければ、有理変換によって超幾何に帰着

・**Riccati 解**の場合は Vector 束が split （モノドロミが可約）

$$\Downarrow$$

梅村の古典解に対しては、いつも超幾何に帰着

4. モノドロミ可解〜対称解

4.0 Painleve II

$$\begin{cases} q' = -q^2 + p - \frac{t}{2}, \\ p' = 2pq + \alpha + \frac{1}{2}. \end{cases}$$

$\mathbb{Z}_3$ 対称性: $t \to \omega t,\ q \to \omega^2 q,\ p \to \omega p. \quad \omega^3 = 1.$

4.1 Bäcklund 変換

	α_0	α_1	q	p
s_0	$-\alpha_0$	$\alpha_1 + 2\alpha_0$	$q + \frac{\alpha_0}{f}$	$p + \frac{4\alpha_0 q}{f} + \frac{2{\alpha_0}^2}{f^2}$
s_1	$\alpha_0 + 2\alpha_1$	$-\alpha_1$	$q + \frac{\alpha_1}{p}$	p

$$\alpha = \alpha_1 - 1/2, \quad \alpha_0 + \alpha_1 = 1, \quad f = p - 2q^2 - t$$

4.2 モノドロミ保存変形

$$\frac{dY}{dx} = A(x,t)Y, \quad \frac{dY}{dt} = B(x,t)Y$$

Flaschka-Newell の標準形

$$A(x,t) = 4\begin{pmatrix} -ix^2 & yx \\ yx & ix^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -it - 2iy^2 & 2iz \\ -2iz & it + 2iy^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{x},$$

$$B(x,t) = -i\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 & y \\ y & 0 \end{pmatrix}.$$

4.3 Stokes データ ∞ での Stokes 行列:

$$G_{2j} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a_{2j} & 1 \end{pmatrix}, \quad G_{2j-1} = \begin{pmatrix} 1 & a_{2j-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

for $j = 1, 2, 3$. $a_j = -a_{j+3}$.

$$a_1 - a_2 + a_3 + a_1 a_2 a_3 = -2\sin \alpha\pi. \tag{1}$$

$\mathbb{Z}_3$ **対称性**: $a_1 \to -a_2, a_2 \to -a_3, a_3 \to a_1$.

4.4 $\mathbb{Z}_3$-対称解

$$q=\sum q_n t^{3n+2},\qquad p=\sum p_n t^{3n+1}$$

$$A:\ \begin{cases} q=\frac{\alpha}{2}t^2+\cdots, \\ p=\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)t+\cdots, \end{cases}$$

$$B:\ \begin{cases} q=\frac{1}{t}+\cdots, \\ p=-\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)t+\cdots. \end{cases}\quad C:\ \begin{cases} q=-\frac{1}{t}+\cdots, \\ p=-\frac{2}{t^2}+\frac{t}{2}+\cdots. \end{cases}$$

$\mathbb{Z}_3$-対称解 (Kitaev) A を代入して $t=0$

$$A(x,0)=4\begin{pmatrix}-ix^2 & 0\\ 0 & ix^2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & \alpha\\ \alpha & 0\end{pmatrix}\frac{1}{x}.$$

$$Y(x,0)=\begin{pmatrix} s^{\frac{-1}{2}}W_{\frac{1}{2},\frac{\alpha}{3}}(s) & \frac{i\alpha}{3}(e^{-i\pi}s)^{\frac{-1}{2}}W_{\frac{-1}{2},\frac{\alpha}{3}}(e^{-i\pi}s) \\ \frac{-i\alpha}{3}s^{\frac{-1}{2}}W_{\frac{-1}{2},\frac{\alpha}{3}}(s) & (e^{-i\pi}s)^{\frac{-1}{2}}W_{\frac{1}{2},\frac{\alpha}{3}}(e^{-i\pi}s) \end{pmatrix},\ s=\frac{8}{3}e^{i\frac{\pi}{2}}x^3$$

4.5 $\mathbb{Z}_3$-対称な Stokes data

$$x^3-3x=2\sin(\alpha\pi).$$

Hermite's solution

$$\begin{aligned} x_1 &= 2\cos\left(\left(\frac{1}{6}-\frac{\alpha}{3}\right)\pi\right), \\ x_2 &= 2\cos\left(\left(\frac{5}{6}-\frac{\alpha}{3}\right)\pi\right), \\ x_3 &= 2\cos\left(\left(\frac{3}{2}-\frac{\alpha}{3}\right)\pi\right). \end{aligned}$$

4.6 解と Stokes data に作用する Bäcklund 変換

$$s_0: A\longleftrightarrow C,\ x_3\longleftrightarrow x_2$$

$$s_1: A\longleftrightarrow B,\ x_3\longleftrightarrow x_1$$

Theorem 1. 解 *(A)* に対して, *Stokes data* は $a_1 = x_3$.
解 *(B)* に対して, *Stokes data* は $a_1 = x_1$.
解 *(C)* に対して, *Stokes data* は $a_1 = x_2$.

Theorem 2. 次の *Riemann-Hilbert* 対応はほとんど *1* 対 *1*.

$$\mathcal{RH}_\alpha : A(x; y, z, t) \longrightarrow \{a_1, a_2, a_3\}$$

1. *If* α が半整数なら, (1) は二重点を持つ.
2. $\mathcal{RH}$ は同時特異点解消.
3. $b_0 = \sin \alpha\pi$ は $W(A_1^{(1)})$ の不変式.

Theorem 3.

Parameter	Stokes data	Solution
$\alpha = 0$	$a_j = 0$	$y = 0$
$\alpha = -1/2$	$a_1 = 1, a_2 = -1, a_3 = 1$ (node)	Airy
any	$3a_1 - a_1^3 = -2\sin\alpha\pi$	$y(0) = y'(0) = 0$

5 P4 の対称解（金子）

5.0 対称形式

$$
\begin{aligned}
f_0' &= f_0(f_1 - f_2) + \alpha_0,\\
f_1' &= f_1(f_2 - f_0) + \alpha_1,\\
f_2' &= f_2(f_0 - f_1) + \alpha_2.
\end{aligned}
$$

$$f_0 + f_1 + f_2 = t, \qquad \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = 1$$

5.1 Bäcklund 変換

x	α_0	α_1	α_2	f_0	f_1	f_2
$s_0(x)$	$-\alpha_0$	$\alpha_1+\alpha_0$	$\alpha_2+\alpha_0$	f_0	$f_1-\frac{\alpha_0}{f_0}$	$f_2+\frac{\alpha_0}{f_0}$
$s_1(x)$	$\alpha_0+\alpha_1$	$-\alpha_1$	$\alpha_2+\alpha_1$	$f_0+\frac{\alpha_1}{f_1}$	f_1	$f_2-\frac{\alpha_1}{f_1}$
$s_2(x)$	$\alpha_0+\alpha_2$	$\alpha_1+\alpha_2$	$-\alpha_2$	$f_0-\frac{\alpha_2}{f_2}$	$f_1+\frac{\alpha_2}{f_2}$	f_2
$\pi(x)$	α_1	α_2	α_0	f_1	f_2	f_0

5.2 モノドロミ保存変形

$$\frac{dY}{dx} = A(x,t)Y, \quad \frac{dY}{dt} = B(x,t)Y$$

$$
\begin{aligned}
A(x,t) = &\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} t & u \\ 2(yw-\theta_0-\theta_\infty)/u & -t \end{pmatrix} + \\
&\begin{pmatrix} -yw+\theta_0 & -uy/2 \\ 2w(yw-2\theta_0)/u & yw-\theta_0 \end{pmatrix} \frac{1}{x},\\
B(x,t) = &\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 & u \\ 2u(z-\theta_0-\theta_\infty)/u & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

$$\alpha_0 = \theta_\infty - \theta_0, \quad \alpha_1 = 2\theta_0, \quad \alpha_2 = 1 - \theta_\infty - \theta_0.$$

5.3 ∞ のまわりの Stokes 行列

$$G_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}, \quad G_2 = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad G_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}, \quad G_4 = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

パラメタ $p = ab, q = bc, r = cd$ の間の関係

$$q(1+q)e^{2i\pi\theta_\infty} + [pr + (1+p)(1+r)q]e^{-2i\pi\theta_\infty} = 2q\cos 2\pi\theta_0.$$

$\mathbb{Z}_2$ **対称性**: $p \leftrightarrow r, q \leftrightarrow e^{-4\pi i\theta_\infty} pr/q.$

5.4 対称解

$\mathbb{Z}_2$ **対称性**: $t \leftrightarrow -t, \quad f_j \leftrightarrow -f_j.$

$$(*) \quad f_j = \frac{1}{3}t + \cdots, \qquad (j = 0, 1, 2)$$

$$(j) : \begin{cases} f_j = -\alpha_j t + \cdots, \\ f_{j+1} = \frac{1}{t} + \cdots, \\ f_{j-1} = -\frac{1}{t} + \cdots, \end{cases} \qquad (j = 0, 1, 2 \bmod 3)$$

5.5 変形方程式の特殊化

対称解 $(*)$ の場合 $t = 0, y = w = 0$

$$A(x,t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 & u \\ 2(-\theta_0 - \theta_\infty)/u & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \theta_0 & 0 \\ 0 & -\theta_0 \end{pmatrix} \frac{1}{x}$$

$$Y(x) = \begin{pmatrix} L_{k,m}(x) & L_{k,-m}(x) \\ \frac{2k-2m-1}{u(2m+1)} L_{k+\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2}}(x) & \frac{2(2m+1)}{u} L_{k+\frac{1}{2}, -m-\frac{1}{2}}(x) \end{pmatrix},$$

$$L_{k,m}(x) = x^{\theta_0} e^{-\frac{x^2}{2}} {}_1F_1(m - k + \frac{1}{2}, 2m+1; x^2)$$

$$k = \frac{2\theta_\infty - 1}{4}, \qquad m = \frac{2\theta_0 - 1}{4}$$

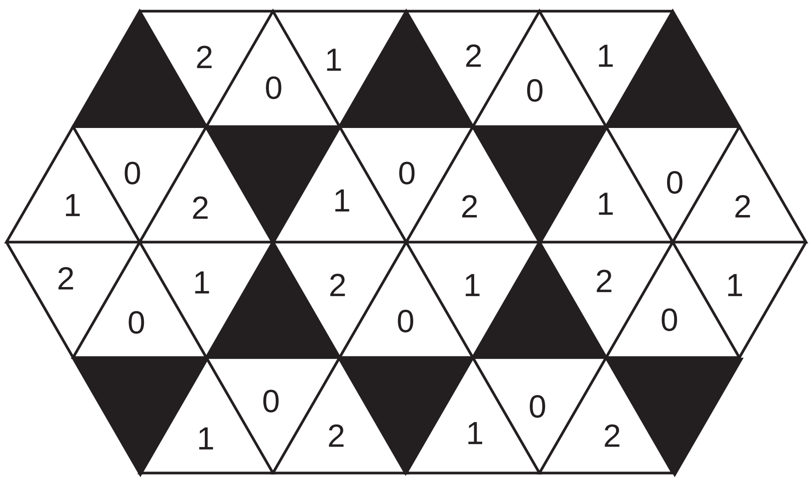
5.6 $\mathbb{Z}_2$ 対称な Stokes data

$$p = 2e^{\pi i \theta_\infty}\left(-\cos\pi\theta_\infty \pm \cos\pi\theta_0\right), \quad 2ie^{\pi i \theta_\infty}\left(\sin\pi\theta_\infty \pm \sin\pi\theta_0\right)$$

$$s_j : (*) \leftrightarrow (j),\ (j \pm 1) \leftrightarrow (j \pm 1)$$

定理
解 (*) に対して、 Stokes data は $(\sin, +)$.
解 (0) に対して、 Stokes data は $(\cos, -)$.
解 (1) に対して、 Stokes data は $(\sin, -)$.
解 (2) に対して、 Stokes data は $(\cos, +)$.

$$(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2) \mapsto (-1, 1, 0),\ (\theta_0, \theta_\infty) \mapsto (1/2, -1/2),\ (*) \to (2)$$
$$(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2) \mapsto (0, 1, -1),\ (\theta_0, \theta_\infty) \mapsto (1/2, 1/2),\ (*) \to (0)$$
$$(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2) \mapsto (1, 0, -1),\ (\theta_0, \theta_\infty) \mapsto (0, 1),\ (*) \to (1)$$



6. 対称解：まとめ

・対称解は I, II, III, IV に存在する

・I から V までの対称解＋代数解は全て**合流超幾何**に帰着

・実は、合流超幾何からの**有理変換**＝対称解＋代数解

・P2 の **Flaschka-Newell 表示**と **Miwa-Jimbo 表示**：

$$
\begin{tikzcd}
 & & (1)^2 \arrow[r] \arrow[dr] & (1)(1/2) \arrow[r] & (1/2)^2 \\
(0)^4 \arrow[r] & (0)^2(1) \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & (0)^2(1/2) & (3) \arrow[r] & (5/2) \\
 & & (0)(2) \arrow[ur] \arrow[r] & (0)(3/2) &
\end{tikzcd}
$$

・**Flaschka-Newell 表示** (0)(3/2)

・ **Miwa-Jimbo 表示** (3)

注意）

Flaschka-Newell 表示も P6 からの退化系列の一つ

P3(D_6) が二つあるのは P5 で $\delta = 0$ のケース

合流超幾何方程式 CHG(a,c)

$$xu'' + (c-x)u' - au = 0$$

退化合流超幾何方程式 DCHG(c) （$a \to \infty$）

$$xu'' + cu' - u = 0$$

定理 (奥村 & O)
CHG(a,c)、DCHG(c) から有理変換で P1〜P5 の全ての対称解・代数解を得る。R. Fuchs の問題は P1〜P5 で肯定的

- 2 次変換

CHG(a,c)	$x = z^2$	P4-sym
CHG$(a,1/2)$	$x = (z-t)^2$	D6-alg
DCHG(c)	$x = (z-t)^2$	P5-rat
DCHG$(1/2)$	$x = z^2/(z^2-t^2)$	D8-alg

- 3 次変換

CHG$(a,2/3)$	$x = z^3$	P2-sym
DCHG$(2/3)$	$x = z^3$	P2^{FN}-sym
DCHG$(1/2)$	$x = z^2(z-t)$	P2^{FN}-rat
DCHG$(2/3)$	$x = z^3/(z-t)$	D7-alg

- 4 次変換

DCHG$(2/3)$	$x = z^3(z-t)$	P4-rat

- 5 次変換

DCHG$(1/5)$	$x = z^5$	P1-sym

- 6 次変換

DCHG$(2/3)$	$x = z^3(z-t)^3$	P2-rat

7. P5 のモノドロミ可解〜Briot-Bouquet 解

7.1 P5 について

$$
\begin{aligned}
y'' &= \left(\frac{1}{2y}+\frac{1}{y-1}\right){y'}^2-\frac{1}{t}y' \\
&\qquad\qquad +\frac{(y-1)^2}{t^2}\left(\alpha y+\frac{\beta}{y}\right)+\gamma\frac{y}{t}+\delta\frac{y(y+1)}{y-1}
\end{aligned}
$$

- $\gamma=0,\delta=0$: quadrature
- $\gamma\neq 0,\delta=0$: P3
- $\gamma\neq 0,\delta\neq 0$: scale to $\delta=-\frac{1}{2}$

注）$\alpha=0,\beta=0$ のときも二次変換で P3 に帰着 (Painleve)

7.2 Hamiltonian form of Painlevé V

$$
tH_V=p(p+t)q(q-1)+\alpha_2qt-\alpha_3pq-\alpha_1p(q-1)
$$

$$
\mathcal{H}_V:\ \begin{cases} tq'=q(2pq-2p+tq-t-\alpha_1-\alpha_3)+\alpha_1, \\ tp'=-p(2pq-p+2tq-t-\alpha_1-\alpha_3)-\alpha_2t, \end{cases}
$$

$y=1-1/q$ は第 5 方程式を満たす：

$$
\alpha=\frac{{\alpha_1}^2}{2},\quad \beta=-\frac{{\alpha_3}^2}{2},\quad \gamma=\alpha_0-\alpha_2,\quad \delta=-\frac{1}{2},
$$

$$
\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=1
$$

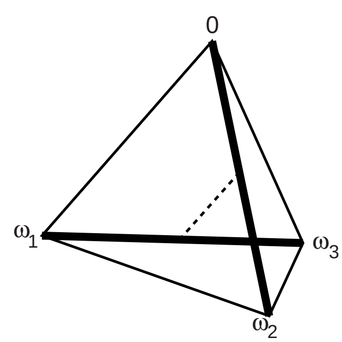
7.3 Bäcklund 変換

$$
\begin{aligned}
&\widetilde{W}(A_3^{(1)}) = G \ltimes W(A_3^{(1)}) = \langle s_0, s_1, s_2, s_3, \pi, \sigma \rangle, \\
&\widehat{W}(A_3^{(1)}) = W(A_3) \ltimes P(A_3) = \langle s_0, s_1, s_2, s_3, \pi \rangle, \\
&W(A_3^{(1)}) = W(A_3) \ltimes R(A_3) = \langle s_0, s_1, s_2, s_3 \rangle, \\
&G = \mathrm{Aut}(A_3^{(1)}) = \langle \sigma, \pi \rangle \cong \mathfrak{D}_8, \\
&P(A_3)/R(A_3) \cong \mathbb{Z}_4.
\end{aligned}
$$

x	α_0	α_1	α_2	α_3	q	p	t
$s_0(x)$	$-\alpha_0$	$\alpha_1+\alpha_0$	α_2	$\alpha_3+\alpha_0$	$q+\frac{\alpha_0}{p+t}$	p	t
$s_1(x)$	$\alpha_0+\alpha_1$	$-\alpha_1$	$\alpha_2+\alpha_1$	α_3	q	$p-\frac{\alpha_1}{q}$	t
$s_2(x)$	α_0	$\alpha_1+\alpha_2$	$-\alpha_2$	$\alpha_3+\alpha_2$	$q+\frac{\alpha_2}{p}$	p	t
$s_3(x)$	$\alpha_0+\alpha_3$	α_1	$\alpha_2+\alpha_3$	$-\alpha_3$	q	$p-\frac{\alpha_3}{q-1}$	t
$\pi(x)$	α_1	α_2	α_3	α_0	$-\frac{p}{t}$	$t(q-1)$	t
$\sigma(x)$	α_0	α_3	α_2	α_1	$1-q$	$-p$	$-t$

7.4 古典解の分類

面	Riccati 解（合流超幾何） $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$
細線	Riccati 解が交差: A_2 交点は Legendre 多項式
太線	Riccati 解が交差しない: $A_1 \oplus A_1$ 二次変換で P_{III} へ
頂点	Riccati 解が交差: A_3
点線	$\pi^2 : q \to 1-q$ の固定点、有理解



7.5 P_{V} (Garnier-Okamoto)

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + p(x,t)\frac{\partial y}{\partial x} + q(x,t)y = 0,\\
\frac{\partial y}{\partial t} =& a(x,t)\frac{\partial y}{\partial x} + b(x,t)y,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p(x,t) &= \frac{1-\kappa_0}{x} + \frac{\eta t}{(x-1)^2} + \frac{1-\theta}{x-1} - \frac{1}{x-y},\\
q(x,t) &= \frac{\kappa}{x(x-1)} - \frac{t\mathcal{H}_V}{x(x-1)^2} + \frac{y(y-1)z}{x(x-1)(x-y)},\\
a(x,t) &= \frac{y-1}{t}\frac{x(x-1)}{x-y},\\
b(x,t) &= \frac{1}{2}\left(p(x,t)a(x,t) - \frac{\partial a}{\partial x}\right) + \frac{1}{2(x-1)} - \frac{\eta}{2(x-y)}\frac{dy}{dt}.
\end{aligned}
$$

$$
t\mathcal{H}_V = y(y-1)^2z^2 - \left\{\kappa_0(y-1)^2 + \theta y(y-1) + \eta t y\right\} z + \kappa(y-1).
$$

$$
\kappa = \frac{1}{4}(\kappa_0+\theta)^2 - \frac{1}{4}\kappa_\infty^2. \quad (\eta = 1)
$$

$$
\kappa_\infty = \alpha_1,\ \kappa_0 = \alpha_3,\ \theta = -1-\alpha_0+\alpha_2,\ \kappa = \alpha_0(\alpha_0+\alpha_1)
$$

7.6 Matrix form: P_{V} (Miwa-Jimbo 1981)

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial Y}{\partial x} &= A(x,t)Y\\
\frac{\partial Y}{\partial t} &= B(x,t)Y
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A(x,t) &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & -t \end{pmatrix} + \frac{1}{x}\begin{pmatrix} z+\theta_0/2 & -u(z+\theta_0) \\ z/u & -z-\theta_0/2 \end{pmatrix}\\
&+ \frac{1}{x-1}\begin{pmatrix} -z-(\theta_0+\theta_\infty)/2 & uy[z+(\theta_0-\theta_1+\theta_\infty)/2] \\ -[z+(\theta_0+\theta_1+\theta_\infty)/2]/uy & z+(\theta_0+\theta_\infty)/2 \end{pmatrix},\\
B(x,t) &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x\\
&+\frac{1}{t}\begin{pmatrix} 0 & u(z+\theta_0 - y[z+\frac{\theta_0-\theta_1+\theta_\infty}{2}]) \\ u^{-1}\left(z-\frac{1}{y}[z+\frac{\theta_0+\theta_1+\theta_\infty}{2}]\right) & 0 \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

$$
\theta_0 = 1-\alpha_0,\ \theta_1 = \alpha_2,\ \theta_\infty = \alpha_1-\alpha_3.
$$

7.7 原点で有理型な解〜Briot-Bouquet

Theorem 4. (Gromak)
P5 の解は $t=0$ のまわりで有理型なら正則。3つある

$$y = 1 + \frac{t}{\gamma} + \sum_{n=2}^{\infty} a_n t^n.$$

$$y = \pm\sqrt{-\frac{\beta}{\alpha}} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n.$$

$A)$	$y = +\dfrac{\alpha_3}{\alpha_1} + \cdots$	$q = \dfrac{\alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_3} + \cdots$	$p = (\alpha_1 - \alpha_3) + \cdots$
$B)$	$y = -\dfrac{\alpha_3}{\alpha_1} + \cdots$	$q = \dfrac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_3} + \cdots$	$p = -\dfrac{\alpha_2}{\alpha_0 + \alpha_2} t + \cdots$
$C)$	$y = 1 + \cdots$	$q = \dfrac{\alpha_2 - \alpha_0}{t} + \cdots$	$p = -\dfrac{\alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_0} t + \cdots$

Backlund 変換

	s_0	s_1	s_2	s_3	π	σ
A	A	B	A	B	C	A
B	C	A	C	A	B	B
C	B	C	B	C	A	C

定理（金子）
(1) (A) を **MJ** に代入して $t \to 0$ とすると超幾何に帰着
$x = \infty$ での Stokes 係数$= 0$
(2) (C) を **Garnier** に代入して $t \to 0$ とすると超幾何に帰着
$x = \infty$ での Stokes 係数$= 0$

- 正則解は収束（**Briot-Bouquet** の定理）
- 同様のことは P3(D6) でも成り立つ（奥村）

$t \to 0$ とすると合流超幾何に帰着
P5$\to$P3 の退化になっている
D7, D8 でも成り立つ（D8 では $t^{1/2}$ べきで展開）

- P6 でもいけそうだ（金子）

∞. 現代の Whittaker-Watson

1902 E. T. Whittaker “**Modern Analysis**” (Cambridge)

- **絶海の孤島**から **大陸の中の一つの国**へ
- **特殊**なもの、**可解**なものの面白さ
- Riemann-Hilbert 問題＝ **vector 束の section** を調べる
- Painleve は「方程式とモノドロミ」の**仲人**
- line 束（**Abel 積分**）に帰着するとモノドロミ可解
    - 超幾何も open Riemann 面の Abel 積分
    - 代数解は有理変換で超幾何に帰着（R. Fuchs の問題）
    - Riccati 解は line 束に分解する場合
    - 対称解・BB 解は、特殊値・境界値で超幾何に帰着
- 微分幾何、数理物理、ランダム行列、数論（mixed motif?）
- **漸近解析**は新しい数学への源泉