

4) 曲線  $(-u^2 + 1, -u^3 + u)$  のベジエ点を求めることを考えよう。  
 $x = -(2t - 1)^2 + 1, y = -(2t - 1)^3 + (2t - 1)$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) とおいて  $-(2t - 1)^2 + 1 = \frac{4}{3}B_1^3(t) + \frac{4}{3}B_2^3(t)$ ,  
 $(2t - 1)^3 + (2t - 1) = -\frac{4}{3}B_1^3(t) + \frac{4}{3}B_2^3(t)$  より  
 $\mathbf{b}_0 = (0, 0), \mathbf{b}_1 = (\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}), \mathbf{b}_2 = (\frac{4}{3}, \frac{4}{3}), \mathbf{b}_3 = (0, 0)$  を得る .

## 1.4 ベジエ曲線の次数上げ, 細分割, 導関数

区分的にはベジエ曲線となっている曲線を用いて形状設計を行っているとき, 制御多角形を何度か変更した後で, ある部分が  $n$  次の曲線では望ましい形状を作成するだけの自由度をもっていないことが分かったとする. このとき, すでにある望ましい部分の形状を変えないで, 自

由度を上げる必要が生じる。すなわち、曲線の形状を変えないようにベジエ点を1個追加することが必要となる。これがベジエ曲線の次数上げである。

$b_i$  ( $i = 0, \dots, n$ ) をベジエ点とする。  $b_i^{(1)}$  を

$$b_i^{(1)} = \frac{i}{n+1} b_{i-1} + \left(1 - \frac{i}{n+1}\right) b_i, \quad (i = 0, \dots, n+1) \quad (7)$$

で定義すると、 $n$  次ベジエ曲線  $b_0^n(t)$  は、 $b_i^{(1)}$  をベジエ点とする

$n+1$  次ベジエ曲線  $\sum_{i=0}^{n+1} b_i^{(1)} B_i^{n+1}(t)$  として表せる。

次数上げを繰り返すことにより、 $n$  次ベジエ曲線を  $n+r$  次ベジエ曲線としてあらわすことができる。

このとき、対応するベジエ点  $\mathbf{b}_i^{(r)}$  は

$$\mathbf{b}_i^{(r)} = \sum_{j=i-r}^i \frac{{}^n C_j \cdot {}^r C_{i-j}}{{}^{n+r} C_i} \mathbf{b}_j, \quad i = 0, \dots, n+r \quad (8)$$

で与えられる。また、制御多角形を次数上げる作用素を  $\mathcal{E}$ 、 $\mathbf{P}$  を  $n$  次ベジエ多角形とし、対応する  $n$  次ベジエ曲線を  $\mathbf{b}_0^n(t)$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) とすると、次数上げを行ったベジエ多角形の列  $\mathbf{P}, \mathcal{E}\mathbf{P}, \mathcal{E}^2\mathbf{P}, \dots$  について次の定理が成り立つ。

**定理 1.2 (収束)** 次数上げを繰り返していくと、ベジエ多角形はベジエ曲線に収束する。すなわち

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \mathcal{E}^r \mathbf{P} = \mathbf{b}_0^n(t) \quad (9)$$

が成り立つ。

**補題 1.3 (細分割)** ド・カステリョのアルゴリズムを用いて、ベジエ曲線を  $t = t_0$  で2つのベジエ曲線に細分割することができる。細分割された2つのベジエ曲線のベジエ点はド・カステリョの図式(10)の境界の点で与えられる。すなわち、 $b_0, b_0^1(t_0), b_0^2(t_0), \dots, b_0^n(t_0)$  と  $b_0^n(t_0), b_1^{n-1}(t_0), b_2^{n-2}(t_0), \dots, b_n$  がそれぞれのベジエ点となる。

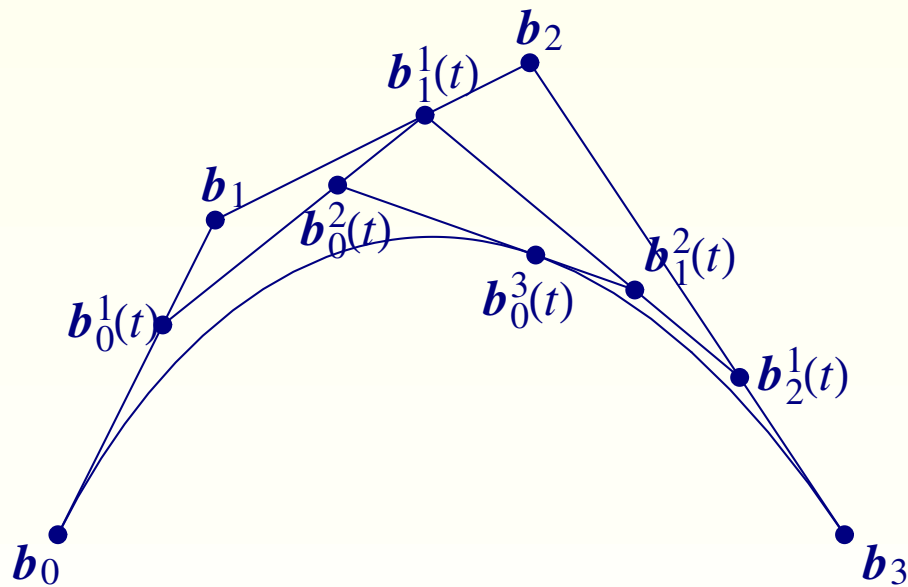


図 3

$$\begin{array}{cccc}
 b_0 & & & \\
 b_1 & b_0^1(t) & & \\
 b_2 & b_1^1(t) & b_0^2(t) & \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\
 b_n & b_{n-1}^1(t) & b_{n-2}^2(t) & \cdots & b_0^n(t)
 \end{array} \tag{10}$$

ベジエ曲線  $\mathbf{b}_0^n(t)$  の導関数は、制御点の差分を用いて計算できる。制御点の前進差分演算子  $\Delta^k \mathbf{b}_j$  を帰納的に

$\Delta^0 \mathbf{b}_j = \mathbf{b}_j$ ,  $\Delta^k \mathbf{b}_j = \Delta^{k-1}(\mathbf{b}_{j+1} - \mathbf{b}_j)$  で定義すると、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{b}_0^n(t) &= n \sum_{j=0}^{n-1} (B_{j-1}^{n-1}(t) - B_j^{n-1}(t)) \mathbf{b}^j = n \sum_{j=0}^{n-1} (\mathbf{b}_{j+1} - \mathbf{b}_j) B_j^{n-1}(t) \\ &= n \sum_{j=0}^{n-1} \Delta \mathbf{b}_j B_j^{n-1}(t) \end{aligned}$$

となる。

特に、ベジエ曲線  $\mathbf{b}_0^n(t)$  は端点  $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_n$  でそれぞれ、ベジエ多角形の辺  $\overline{\mathbf{b}_0 \mathbf{b}_1}$ ,  $\overline{\mathbf{b}_{n-1} \mathbf{b}_n}$  に接することがわかる。上述の細分割とあわせると、ベジエ曲線  $\mathbf{b}_0^n(t)$  は点  $\mathbf{b}_0^n(t_0)$  で線分  $\overline{\mathbf{b}_0^{n-1}(t_0) \mathbf{b}_1^{n-1}(t_0)}$  に接していることもわかる。

また，高階の導関数に対しても，

$$\frac{d^k}{dt^k} \mathbf{b}_0^n(t) = \frac{n!}{(n-k)!} \sum_{j=0}^{n-k} \Delta^k \mathbf{b}_j B_j^{n-k}(t)$$

が成り立つ．