フィンスラー多様体のリッチ曲率

太田 慎一　(京都大学・理)*

概　要

フィンスラー多様体とその上の測度の組に対し，重みつきリッチ曲率を定義する．応用として重みつきリッチ曲率の下限と曲率次元条件の同値性，非線形ラプラシアンを用いたBochner-Weitzenböck公式などが得られる．

1. 序

フィンスラー多様体(M,F)は，各点$x \in M$での接空間T_xMにノルム$F|_{T_xM}$（より一般には，非対称性$F(-v) \neq F(v)$を許すミンコフスキノルム）を与えられた多様体である．特に全ての点xで$F|_{T_xM}$が内積によって与えられるとき，(M,F)はリーマン多様体となる．フィンスラー多様体には距離や測地線などの幾何学的な量が自然に導入され，接続を用いて曲率（断面曲率に対応する旗曲率，及びリッチ曲率）も定義される．リーマン多様体ではリッチ曲率は体積測度の振る舞いを制御するが，フィンスラー多様体では体積測度のような標準的な測度をひとつ決めることはできない．そこで，M上の$\mathcal{C}^\infty$正測度mを任意に固定し，重みつきリーマン多様体の理論に倣ってリッチ曲率をmに応じて変形する．このようにして [Oh1] で導入された重みつきリッチ曲率Ric_N（$N \in [\dim M, \infty]$はパラメータ）は，自然かつ有用な量であることが明らかになってきている．

本稿では，フィンスラー幾何の基本的な事項を解説したあと，重みつきリッチ曲率Ric_Nの定義を与える．続けてRic_Nが定数$K \in \mathbb{R}$以上であることとLott，Sturm，Villaniの曲率次元条件$\mathsf{CD}(K,N)$との同値性，Ric_Nと非線形ラプラシアンを用いたBochner-Weitzenböck公式とその勾配評価などへの応用，そして最後に今後の課題と発展の可能性について述べる．

2. フィンスラー多様体

始めに，フィンスラー幾何の基本的な概念を概観する．より詳しくは，[BCS]や[Sh]などを参照されたい．

2.1. フィンスラー構造と幾何学的量

Mを連結$\mathcal{C}^\infty$多様体で次元nが2以上なものとする（$n=1$ではリーマン多様体との違いがない）．以降では，$x \in M$の近傍Uの局所座標$(x^i)_{i=1}^n$に対し，TUに

$$v = \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

本研究は科学研究費若手研究（B）20740036及び23740048の助成を受けたものである．
* 〒606-8502 京都市左京区北白川追分町 京都大学大学院理学研究科
e-mail: sohta@math.kyoto-u.ac.jp
web: http://www.math.kyoto-u.ac.jp/~sohta/

で導入される座標$(x^i, v^i)_{i=1}^n$を考える．

定義 2.1 (フィンスラー構造) Mの接束TM上の非負関数$F : TM \longrightarrow [0,\infty)$が次の3条件を満たすとき，$F$を$M$の$\mathcal{C}^\infty$**フィンスラー構造**，$(M,F)$を$\mathcal{C}^\infty$**フィンスラー多様体**と呼ぶ：

(1)　（正則性）Fは$TM \setminus \{0\}$上$\mathcal{C}^\infty$である．但し，$\{0\} := \{0 \in T_xM \mid x \in M\}$.

(2)　（**正等質性**）任意の$v \in TM$，$c > 0$に対し，$F(cv) = cF(v)$が成り立つ．

(3)　（**強凸性**）任意の$v \in T_xM \setminus \{0\}$に対し，$n$次対称行列

$$g_{ij}(v) := \frac{1}{2}\frac{\partial(F^2)}{\partial v^i \partial v^j}(v) \tag{2.1}$$

が正定値である．

つまり，Fの各接空間T_xMへの制限はミンコフスキノルム（例 2.2(a)）であり，またそれは水平方向に滑らかに変化する．各接空間T_xMの中で，Fの開単位球$\{v \in T_xM \mid F(v) < 1\}$は原点を含む原点対称とは限らない凸集合であり，強凸性は単位球面$\{v \in T_xM \mid F(v) = 1\}$が正に曲がっていることを意味する（下図1参照）．特に$F|_{T_xM}$は狭義凸（一次独立な$v, w \in T_xM$に対し$F(v+w) < F(v) + F(w)$）であり，また各$v \in T_xM \setminus \{0\}$に対し(2.1)の行列$g_{ij}(v)$は$T_xM$の内積を定める．この内積を$g_v$で表す：

$$g_v\left(\sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x^i}, \sum_{j=1}^n b_j \frac{\partial}{\partial x^j}\right) := \sum_{i,j=1}^n a_i b_j g_{ij}(v). \tag{2.2}$$

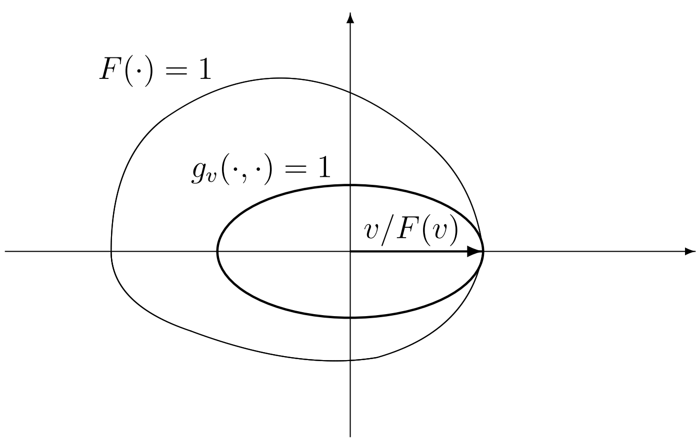

図1

g_v の単位球面（太線の楕円）は $F|_{T_xM}$ の単位球面と $v/F(v)$ で 2 次まで接する（強凸性は，2 次の近似が直線ではなく楕円になることを保証している）．この意味で g_v は F を v の方向で最も良く近似する内積と解釈でき，フィンスラー幾何へのリーマン幾何的なアプローチで重要な役割を果たす．(M,F) が元々リーマン多様体だった場合には，g_v は元のリーマン計量と常に一致する．

F から幾つかの幾何学的量が自然に導入される．

- **距離**：$x,y \in M$ に対し，x から y への距離を
$$d(x,y) := \inf\left\{ \int_0^1 F(\dot\eta)\,dt \,\middle|\, \eta:[0,1] \longrightarrow M,\ \mathcal{C}^1,\ \eta(0)=x,\ \eta(1)=y \right\}$$
と定める．但し，$d(x,y) \neq d(y,x)$ となり得るので，厳密な意味では距離ではない．

- **測地線**：$\mathcal{C}^\infty$ 曲線 $\eta:[0,l] \longrightarrow M$ が局所最短かつ速さ一定（つまり，$F(\dot\eta)$ が定数）であるとき，測地線と呼ぶ．

- **指数写像**：$v \in T_xM$ に対し，測地線 $\eta:[0,1] \longrightarrow M$ で $\dot\eta(0)=v$ を満たすものが存在するとき，$\exp_x(v) := \eta(1)$ と定める．

- **完備性**：指数写像が TM 全体で定義されるとき，つまり任意の測地線 $\eta:[0,l] \longrightarrow M$ が $[0,\infty)$ まで拡張できるとき，(M,F) は前向き完備であるという．このとき，Hopf-Rinow の定理より，任意の 2 点は測地線で結べる．

上では測地線を距離を用いて幾何学的に定義したが，座標を用いると測地線の満たす（常微分）方程式を
$$\ddot\eta^i + \sum_{j,k=1}^n \Gamma^i_{jk}(\dot\eta)\dot\eta^j\dot\eta^k \equiv 0$$
と書き下せる．ここで，$\Gamma^i_{jk}(\dot\eta)$ はフィンスラー計量 F から定まる Christoffel 記号に相当するものであり，点 $\eta(x)$ だけでなく方向 $\dot\eta(x)$ にも依存することに注意する．この Γ^i_{jk} を用いて，ベクトル場 $V=\sum_{i=1}^n V^i(\partial/\partial x^i)$ の $w \in T_xM$ を**参照ベクトル**とする**共変微分**を
$$D^w_v V(x) := \sum_{i,j=1}^n \left\{ v^j \frac{\partial V^i}{\partial x^j}(x) + \sum_{k=1}^n \Gamma^i_{jk}(w)v^jV^k(x) \right\} \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_x, \quad v \in T_xM, \qquad (2.3)$$
と定義する．

2.2. 曲率

フィンスラー多様体の曲率は接続を用いて定義される（接続の取り方は複数あるが，曲率は同じになることが知られている）．しかしその定義は煩雑なため，ここではShenによる有用な解釈を述べる（[Sh, Section 6]）．（**注意**：これから述べるのは定理であり，曲率の定義ではない．）

単位接ベクトル $v \in T_xM \cap F^{-1}(1)$ を固定し，それを全ての積分曲線が測地線である $\mathcal{C}^\infty$ ベクトル場 V に x の近傍 U 上で拡張する（つまり，$V(x) = v$）．すると，(2.2) により U のリーマン計量 g_V が定まる．このとき，v と一次独立な $w \in T_xM$ に対し，**旗曲率** $\mathcal{K}(v, w)$ は v, w の張る平面 $v \wedge w$ の g_V についての断面曲率 $\mathcal{K}^V(v, w)$ と一致する．特に，$\mathcal{K}^V(v, w)$ は V の取り方に依らない．但し，$\mathcal{K}^V(v, w)$ は $v \wedge w$（旗）だけでなく，v（旗竿）の取り方にもよることに注意する．同様に，v の F についての**リッチ曲率** $\mathrm{Ric}(v)$ は g_V についてのリッチ曲率 $\mathrm{Ric}^V(v)$ と一致する．

2.3. 例

フィンスラー多様体の代表的な例を与える．但し，重みつきリッチ曲率の研究が進んでいる空間は多くない．

例 2.2 (a)（**ミンコフスキ空間**）$F : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0, \infty)$ を定義 2.1 の条件を満たす関数とし，$\mathbb{R}^n$ の各点での接空間と $\mathbb{R}^n$ との自然な同一視によって F を $F : T\mathbb{R}^n \longrightarrow [0, \infty)$ に拡張する．この $(\mathbb{R}^n, F)$ をミンコフスキ（ノルム）空間，F をミンコフスキノルムと呼ぶ．ミンコフスキ空間の旗曲率は恒等的に 0 である．

(b)（**Berwald 空間**）Γ^i_{jk} が点のみに依る（つまり，各接空間 T_xM 上で定数である）フィンスラー多様体を Berwald 空間と呼ぶ．Berwald 空間の任意の 2 点の接空間は互いに等長であることが知られている．Berwald 空間は，フィンスラー多様体全体から比べるとかなり狭いが，リーマン多様体とミンコフスキ空間を含む扱いやすい対象である．

(c)（**Randers 空間**）計量 F がリーマン計量 g と 1 形式 β を用いて

$$F(v) = \sqrt{g(v, v)} + \beta(v)$$

と表せるフィンスラー多様体を Randers 空間と呼ぶ．（F の正値性のため，任意の $v \in TM \setminus \{0\}$ に対し $|\beta(v)|^2 < g(v, v)$ が成り立つとする．）Randers 空間は，しばしばリーマン多様体 (M, g) に風が吹いている状況を表したものと解釈される．各 $F|_{T_xM}$ の単位球面は，g の単位球面を β でずれる分だけ平行移動したものである．Randers 空間は物理などの応用上重要であり，また具体的な計算もしやすい．例えば，後述する S 曲率が恒等的に 0 となる測度 m を許容するための必要十分条件を計算で書き下すことができ（[Oh2]），それを満たさない Randers 空間の例も知られている（[Sh]）．（最近，(α, β) **空間**でも類似の結果が得られた，[ST].）

(d)（**ヒルベルト幾何**）$D \subset \mathbb{R}^n$ を有界な開凸集合で，境界 ∂D が滑らかかつ $D \cup \partial D$ が狭義凸であるものとする．相異なる 2 点 $x, y \in D$ に対し，x, y を通る直線と ∂D との交点のうち，x に近い方を x'，y に近い方を y' とおく．このとき，D の**ヒルベルト距離**を

$$d_H(x, y) := \log \left(\frac{\|x' - y\| \cdot \|x - y'\|}{\|x' - x\| \cdot \|y - y'\|} \right)$$

と定める．これは D が球のときは双曲空間のクラインモデルに一致し，それ以外の場合は旗曲率が負定数のフィンスラー構造で実現される（[Eg, Appendix A] など参照）．

(e)（**タイヒミュラー空間**）タイヒミュラー空間のタイヒミュラー計量は完備フィンスラー計量である．一方，Weil–Petersson 計量はリーマン計量であるが完備ではない（[EE], [Wo] など参照）．

3. 重みつきリッチ曲率

前節で，距離などの幾何学的な量がフィンスラー構造から自然に導かれることを見た．それでは，測度はどうであろうか?実は，フィンスラー多様体には標準的な測度は存在しない．幾つかの構成的な測度（Busemann-Hausdorff 測度，Holmes-Thompson 測度など）が知られており，それらはリーマン多様体では全て体積測度と一致するが，フィンスラー多様体では互いに異なる．そこで，M 上の $\mathcal{C}^\infty$ 正測度 m を任意に固定する（すなわち，局所座標を用いて $m = \varphi\, dx^1 \cdots dx^n$ と書いたとき，φ が $\mathcal{C}^\infty$ かつ正）．そして，重みつきリーマン多様体の理論を参考にして，リッチ曲率を m の取り方に応じて変形する．これは自然な方針であることが後にわかる（注意 3.2）．

単位接ベクトル $v \in T_xM$ を，前節と同様に積分曲線が全て測地線である $\mathcal{C}^\infty$ ベクトル場 V に拡張し，リーマン計量 g_V を考える．$\eta : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow M$ を $\dot{\eta}(0) = v$ を満たす測地線とする．更に，g_V のリーマン体積測度を vol_V で表し，$m = e^{-\psi}\, \mathrm{vol}_V$ により関数 ψ を定める．

定義 3.1 (重みつきリッチ曲率) $N \in (n, \infty)$ に対し，

$$\mathrm{Ric}_N(v) := \mathrm{Ric}(v) + (\psi \circ \eta)''(0) - \frac{(\psi \circ \eta)'(0)^2}{N - n}.$$

極限として，

$$\mathrm{Ric}_\infty(v) := \mathrm{Ric}(v) + (\psi \circ \eta)''(0),$$
$$\mathrm{Ric}_n(v) := \begin{cases} \mathrm{Ric}(v) + (\psi \circ \eta)''(0) & \text{if } (\psi \circ \eta)'(0) = 0, \\ -\infty & \text{if } (\psi \circ \eta)'(0) \neq 0. \end{cases}$$

Ric_∞ は解析学や確率論で重要な**Bakry-Émery テンソル**であり，$N < \infty$ の場合の Ric_N は Qian により導入された（[BE], [Qi], [Lo] 参照）．また，$(\psi \circ \eta)'(0)$ は Shen らによって良く研究されている **S 曲率 $\mathbf{S}(v)$** と一致する（[Sh] 参照）．定義から明らかに，重みつきリッチ曲率はパラメータ N について単調増加である：

$$\mathrm{Ric}_N(v) \le \mathrm{Ric}_{N'}(v) \qquad \forall N < N'.$$

従って，Ric_∞ を下から押さえるのが最も易しく，Ric_n を下から押さえるのが最も難しい．

注意 3.2 例 2.2(b) で触れたように，一般のフィンスラー多様体 (M, F) については，$\mathrm{Ric}_n > -\infty$ を満たす（$\Leftrightarrow$ $\mathbf{S} \equiv 0$ である）測度 m が存在するとは限らない．従って，一般のフィンスラー多様体ではリーマン多様体の体積測度のような「良い参照測度」は存在せず，n より真に大きい N で Ric_N を考える必要がある．

4. 曲率次元条件と応用

（重みつき）リーマン多様体において Lott, von Renesse, Sturm, Villani は，$N \in [n, \infty]$ と $K \in \mathbb{R}$ に対し Ric_N が K 以上であることは**曲率次元条件** $\mathsf{CD}(K, N)$ と同値であることを示した（[vRS], [St1], [St2], [St3], [LV1], [LV2]）．この同値性はフィンスラー多様体へそのまま拡張される（[Oh1]）．曲率次元条件の一般論より，$\mathsf{CD}(K, N)$ を満たす空間はリッチ曲率が K 以上かつ次元が N 以下である様に振る舞うことが知られており，これを通してフィンスラー幾何への多くの応用が得られる．この節ではそれらについて簡単に述べる．詳しくは [Oh1] や [太田] を参照されたい．

4.1. 曲率次元条件

曲率次元条件とは，一言で言うと確率測度のなす距離空間上のある種のエントロピーの凸性である（より詳しくは上記の論文や Villani の本 [Vi] 参照）．M 上のボレル確率測度全体のなす集合を $\mathcal{P}(M)$，台がコンパクトな測度のなす部分集合を $\mathcal{P}_c(M)$ で表す．$\mu, \nu \in \mathcal{P}_c(M)$ に対し，$\pi \in \mathcal{P}(M \times M)$ が

$$\pi(A \times M) = \mu(A), \qquad \pi(M \times A) = \nu(A)$$

を全てのボレル集合 $A \subset M$ で満たすとき，π を μ と ν の**カップリング**であると言い，$\pi \in \Pi(\mu, \nu)$ で表す．μ から ν への **L^2-Wasserstein 距離**を

$$W_2(\mu, \nu) := \inf_{\pi \in \Pi(\mu,\nu)} \left(\int_{M \times M} d(x, y)^2 \, \pi(dxdy) \right)^{1/2}$$

で定める．μ から ν への最短線（最適輸送）は，M の測地線に沿った μ の押し出しで与えられる．その変分ベクトル場はヤコビ場であり，従ってリッチ曲率を用いてその挙動を制御できる．

$\mu \in \mathcal{P}_c(M)$ の m についての**相対エントロピー**を，$\mu \ll m$（μ が m について絶対連続）なら $\mu = \rho m$ と表して

$$\mathrm{Ent}_m(\mu) := \int_M \rho \log \rho \, dm,$$

$\mu \not\ll m$ なら $\mathrm{Ent}_m(\mu) := \infty$ と定義する．$K \in \mathbb{R}$ に対し，$\mathsf{CD}(K,\infty)$ は Ent_m の $(\mathcal{P}_c(M), W_2)$ での K 凸性，つまり任意の最短線 $(\mu_t)_{t\in[0,1]} \subset \mathcal{P}_c(M)$ に沿って

$$\mathrm{Ent}_m(\mu_t) \le (1-t)\,\mathrm{Ent}_m(\mu_0) + t\,\mathrm{Ent}_m(\mu_1) - \frac{K}{2}(1-t)tW_2(\mu_0,\mu_1)^2$$

が成り立つことと定義される．$N < \infty$ についても，$\mathsf{CD}(K,N)$ はある種の（N に依存する）エントロピーの（K に依存する）凸性として定義される．

4.2. 応用

曲率次元条件の一般論（[St2], [St3], [LV1], [LV2]）より，Ric_N が下から押さえられたフィンスラー多様体の性質について，次の応用が得られる．

- $\underline{\mathrm{Ric}_\infty \ge K > 0}$：$\mathrm{Ent}_m$ の K 凸性より，Talagrand 不等式，対数ソボレフ不等式，大域ポアンカレ不等式が得られる．また，Talagrand 不等式（または対数ソボレフ不等式）は測度の集中を導く．

- $\underline{\mathrm{Ric}_N \ge K,\ N < \infty}$：同心球の体積増大度について，Bishop-Gromov 体積比較定理が成り立つ（リーマン多様体と同じ評価を整数とは限らない $N \in [2,\infty)$ に拡張したもの）．

- $\underline{\mathrm{Ric}_N \ge K > 0,\ N < \infty}$：直径の上限についての Bonnet-Myers の定理，大域ポアンカレ不等式を改良する Lichnerowicz 不等式が成り立つ．

5. Bochner-Weitzenböck 公式と応用

この節では，最近 [OS3] で得られた一般のフィンスラー多様体（とその上の測度の組）の Bochner-Weitzenböck 公式と，その応用について述べる．

5.1. 非線形ラプラシアン

まず，Bochner-Weitzenböck 公式の記述に必要なラプラシアンを定義する．詳しくは [OS1] を参照されたい．

微分可能な関数 $u : M \longrightarrow \mathbb{R}$ の点 $x \in M$ での**勾配ベクトル** $\boldsymbol{\nabla} u(x) \in T_xM$ を，微分 $Du(x) \in T_x^*M$ の Legendre 変換と定義する．すなわち，$\boldsymbol{\nabla} u(x)$ は

$$[Du(x)]\big(\boldsymbol{\nabla} u(x)\big) = F^*\big(Du(x)\big)^2, \qquad F\big(\boldsymbol{\nabla} u(x)\big) = F^*\big(Du(x)\big)$$

を満たす唯一の T_xM の元である（F^* は F の双対ノルム）．$u \in H^1_{\mathrm{loc}}(M)$ に作用する**非線形ラプラシアン** $\boldsymbol{\Delta}$ を，

$$\int_M \phi \boldsymbol{\Delta} u \, dm := -\int_M D\phi(\boldsymbol{\nabla} u)\, dm \qquad \forall \phi \in \mathcal{C}_c^\infty(M)$$

と弱い意味で定義する．Legendre変換は内積空間以外では非線形なので，$\boldsymbol{\Delta}$ は非線形作用素である（$\boldsymbol{\Delta}(u_1+u_2)=\boldsymbol{\Delta}u_1+\boldsymbol{\Delta}u_2$ とは限らない）．このラプラシアンは Ric_N と相性が良く，例えばラプラシアンの比較定理が成り立つ．次の性質は，我々のBochner-Weitzenböck公式の意味を考える上で重要である．

注意 5.1 $u \in H_0^1(M)$ に対し，可測なベクトル場 V で全ての $x \in M$ で $V(x) \neq 0$ かつ $\boldsymbol{\nabla}u(x) \neq 0$ ならば $V(x) = \boldsymbol{\nabla}u(x)$ を満たすものを取り，関数 f の g_V についての勾配ベクトル場を $\nabla^V f$ で表す．このとき，$\Delta^{\boldsymbol{\nabla}u} f$ を

$$\int_M \phi \Delta^{\boldsymbol{\nabla}u} f \, dm := -\int_M D\phi(\nabla^V f) \, dm \qquad \phi \in \mathcal{C}_c^\infty(M)$$

と定めると，$\Delta^{\boldsymbol{\nabla}u} u = \boldsymbol{\Delta}u$ が成り立つ．つまり，線形作用素 $\Delta^{\boldsymbol{\nabla}u}$ と非線型作用素 $\boldsymbol{\Delta}$ は，u に作用するときは一致する．

ラプラシアン $\boldsymbol{\Delta}$ に対応する**非線形熱方程式** $\partial_t u = \boldsymbol{\Delta}u$ は，F の正則性と強凸性より，それほど扱いにくい方程式ではない．実際，任意の初期値 $u \in H_0^1(M)$ から始まる解 $(u_t)_{t\in[0,\infty)}$ が存在し，それは x について H^2_{loc} かつ $(0,\infty) \times M$ 上 $\mathcal{C}^{1,\alpha}$ である．更に，$(u_t)_{t\in[0,\infty)}$ は（距離 $\overleftarrow{d}(x,y) := d(y,x)$ についての）Wasserstein空間内の相対エントロピーの勾配流と一致する．

5.2. Bochner-Weitzenböck公式

$u \in \mathcal{C}^\infty(M)$ に対し，$M_u := \{x \in M \mid Du(x) \neq 0\}$ とおく．M_u ではリーマン計量 $g_{\boldsymbol{\nabla}u}$ を考えることができ，点ごとの計算により次のBochner-Weitzenböck公式が得られる．

定理 5.2 (点ごとBochner-Weitzenböck公式) 任意の $u \in \mathcal{C}^\infty(M)$ に対し，

$$\Delta^{\boldsymbol{\nabla}u}\left(\frac{F(\boldsymbol{\nabla}u)^2}{2}\right) - D(\boldsymbol{\Delta}u)(\boldsymbol{\nabla}u) = \mathrm{Ric}_\infty(\boldsymbol{\nabla}u) + \|\boldsymbol{\nabla}^2 u\|^2_{HS(\boldsymbol{\nabla}u)} \tag{5.1}$$

が M_u の各点で成り立つ．また，各 $N \in [n,\infty)$ に対し，

$$\Delta^{\boldsymbol{\nabla}u}\left(\frac{F(\boldsymbol{\nabla}u)^2}{2}\right) - D(\boldsymbol{\Delta}u)(\boldsymbol{\nabla}u) \geq \mathrm{Ric}_N(\boldsymbol{\nabla}u) + \frac{(\boldsymbol{\Delta}u)^2}{N} \tag{5.2}$$

がやはり M_u の各点で成り立つ．

(5.1) で，$\boldsymbol{\nabla}^2 u$ は勾配ベクトル場 $\boldsymbol{\nabla}u$ の $\boldsymbol{\nabla}u$ を参照ベクトルとする共変微分 $D^{\boldsymbol{\nabla}u}(\boldsymbol{\nabla}u) : TM \longrightarrow TM$ （(2.3) 参照），$\|\boldsymbol{\nabla}^2 u\|_{HS(\boldsymbol{\nabla}u)}$ はその $g_{\boldsymbol{\nabla}u}$ についてのHilbert-Schmidtノルムを表す．(5.1) の証明は本質的にリーマン多様体と同様の計算によって行われるが，全く同じではない（注意 5.3参照）．最も重要な点は，正しい定式化（どこで $g_{\boldsymbol{\nabla}u}$ を使うか？）を見つけることにある．(5.2) は (5.1) から標準的な方法で導かれる．

注意 5.3 (a) $D^{\boldsymbol{\nabla} u}(\boldsymbol{\nabla} u)$ は $g_{\boldsymbol{\nabla} u}$ についての共変微分とは異なることを注意する．両者は $\boldsymbol{\nabla} u$ の積分曲線が測地線になるときは一致するが，これは u への非常に強い制限である．(重みつきリッチ曲率の定義の過程で見たように，$\boldsymbol{\nabla} u$ の積分曲線が測地線になることは，$\mathrm{Ric}_\infty(\boldsymbol{\nabla} u)$ が $(M, g_{\boldsymbol{\nabla} u}, m)$ のリッチ曲率 $\mathrm{Ric}_\infty^{\boldsymbol{\nabla} u}(\boldsymbol{\nabla} u)$ と一致するための条件でもある.）従って，(5.1) の右辺の各項は重みつきリーマン多様体 $(M, g_{\boldsymbol{\nabla} u}, m)$ の Bochner-Weitzenböck 公式の対応する項とは一致しない．

(b) 一方，(5.1) の左辺に現れる $\Delta^{\boldsymbol{\nabla} u}(F(\boldsymbol{\nabla} u)^2)$ と $D(\boldsymbol{\Delta} u)(\boldsymbol{\nabla} u)$ は F と $g_{\boldsymbol{\nabla} u}$ で一致する（注意 5.1 参照）．

M_u の外では，$\boldsymbol{\Delta} u$ などの量が点ごとには意味を持たないので，積分した形で考える必要がある．この点はリーマン多様体のときよりも慎重に議論する必要がある．

定理 5.4 (積分版 Bochner-Weitzenböck 公式) 任意の $u \in H^2_{\mathrm{loc}}(M) \cap \mathcal{C}^1(M)$ で $\boldsymbol{\Delta} u \in H^1_{\mathrm{loc}}(M)$ であるものに対し，

$$\begin{aligned} &-\int_M D\phi\left(\nabla^{\boldsymbol{\nabla} u}\left(\frac{F(\boldsymbol{\nabla} u)^2}{2}\right)\right) dm \\ &= \int_M \phi\big\{D(\boldsymbol{\Delta} u)(\boldsymbol{\nabla} u) + \mathrm{Ric}_\infty(\boldsymbol{\nabla} u) + \|\boldsymbol{\nabla}^2 u\|^2_{HS(\boldsymbol{\nabla} u)}\big\}\, dm \end{aligned} \tag{5.3}$$

が全ての $\phi \in H^1_c(M) \cap L^\infty(M)$ について成り立つ．また，各 $N \in [n, \infty)$ に対し，

$$-\int_M D\phi\left(\nabla^{\boldsymbol{\nabla} u}\left(\frac{F(\boldsymbol{\nabla} u)^2}{2}\right)\right) dm \ge \int_M \phi\left\{D(\boldsymbol{\Delta} u)(\boldsymbol{\nabla} u) + \mathrm{Ric}_N(\boldsymbol{\nabla} u) + \frac{(\boldsymbol{\Delta} u)^2}{N}\right\} dm \tag{5.4}$$

が全ての非負関数 $\phi \in H^1_c(M) \cap L^\infty(M)$ について成り立つ．

5.3. 応用

Bochner-Weitzenböck 公式は極めて有用な公式であり，リーマン多様体では数多くの応用が知られている．一方，フィンスラー多様体での研究は始まったばかりであり，これからの展開が期待される．ここでは，解析的な応用として，リッチ曲率の下限の下での勾配評価を考える．証明はリーマン多様体の場合と同様の議論（[Da] 参照）に沿って行われる．技術的な理由により，以降では M をコンパクトとする．

熱方程式 $\partial_t u = \boldsymbol{\Delta} u$ の解 $u : [0, T] \times M \longrightarrow \mathbb{R}$ に対し，可測ベクトル場の 1 助変数族 $(V_t)_{t \in [0,T]}$ で，全ての $(t, x) \in [0, T] \times M$ で $V_t(x) \neq 0$ かつ $\boldsymbol{\nabla} u_t(x) \neq 0$ なら $V_t(x) = \boldsymbol{\nabla} u_t(x)$ であるものを固定する．この V についての時間に依存するラプラシアン Δ^V （注意 5.1 参照）の生成する線形対称マルコフ推移作用素を $(P^{\boldsymbol{\nabla} u}_{s,t})_{0 \le s < t \le T}$ で表す．定理 5.4 の (5.3) を用いて，次が示される．

定理 5.5 (Bakry-Émery 型勾配評価) (M,F,m) がある $K\in\mathbb{R}$ について $\mathrm{Ric}_\infty\geq K$ を満たすとし，$u:[0,T]\times M\longrightarrow\mathbb{R}$ を熱方程式の解とする．このとき，任意の $0\leq s<t\leq T$ と $x\in M$ に対し，

$$F\big(\boldsymbol{\nabla} u_t(x)\big)^2\leq e^{-2K(t-s)}P^{\boldsymbol{\nabla} u}_{s,t}\big(F(\boldsymbol{\nabla} u_s)^2\big)(x) \tag{5.5}$$

が成り立つ．

(5.5) は，左辺に現れる非線形な作用 $u_s\longmapsto u_t$ と，右辺の線形な作用 $P^{\boldsymbol{\nabla} u}_{s,t}$ を混合した形になっている．

注意 5.6 リプシッツ関数 $f:M\longrightarrow\mathbb{R}$ のリプシッツ定数 $\mathrm{Lip}\,f$ を

$$\mathrm{Lip}\,f:=\sup_{x,y\in M}\frac{f(y)-f(x)}{d(x,y)}$$

と定義すると，連続な u_0 に対し，(5.5) より $\mathrm{Lip}(u_t)\leq e^{-Kt}\,\mathrm{Lip}(u_0)$ が成り立つ．この性質は，リーマン多様体では熱流の Wasserstein 距離についての収縮性

$$W_2(u_t,\tilde{u}_t)\leq e^{-Kt}W_2(u_0,\tilde{u}_0)\qquad\forall t\geq 0 \tag{5.6}$$

と同値であることが知られている（[vRS]）．更に，この同値性はより一般の線形半群へ拡張されている（[Ku]）．一方，フィンスラー多様体では収縮性 (5.6) は成り立たない（[OS2]）．つまり，曲率次元条件や勾配評価と違い，収縮性にはリーマン構造であることが本質的に必要である．

次に，N が有限な場合には，(5.4) を用いて次が得られる．

定理 5.7 (Li-Yau 型勾配評価) (M,F,m) がある $K\in\mathbb{R}$ と $N\in[n,\infty)$ について $\mathrm{Ric}_N\geq K$ を満たすとし，$K':=\min\{K,0\}$ とおく．このとき，正の値を取る熱方程式の解 $u:[0,T]\times M\longrightarrow(0,\infty)$ と任意の $(t,x)\in(0,T]\times M$，$\theta>1$ に対し，

$$F\big(\boldsymbol{\nabla}(\log u)(t,x)\big)^2-\theta\partial_t(\log u)(t,x)\leq N\theta^2\left(\frac{1}{2t}-\frac{K'}{4(\theta-1)}\right) \tag{5.7}$$

が成り立つ．

上の勾配評価を用いて，更に次が得られる．

定理 5.8 (Li-Yau 型 Harnack 不等式) (M,F,m) がある $K\in\mathbb{R}$ と $N\in[n,\infty)$ について $\mathrm{Ric}_N\geq K$ を満たすとし，$K':=\min\{K,0\}$ とおく．このとき，非負の値を取る熱方程式の解 $u:[0,T]\times M\longrightarrow[0,\infty)$ と任意の $0<s<t\leq T$，$x,y\in M$，$\theta>1$ に対し，

$$u(s,x)\leq u(t,y)\cdot\left(\frac{t}{s}\right)^{\theta N/2}\exp\left(\frac{\theta d(x,y)^2}{4(t-s)}-\frac{\theta K'N(t-s)}{4(\theta-1)}\right) \tag{5.8}$$

が成り立つ．

特に $K=0$ の場合は θ を 1 に収束させることができ，すると (5.7), (5.8) はそれぞれ

$$F\big(\boldsymbol{\nabla}(\log u)(t,x)\big)^2 - \partial_t(\log u)(t,x) \le \frac{N}{2t},$$
$$u(s,x) \le u(t,y) \cdot \left(\frac{t}{s}\right)^{N/2} \exp\left(\frac{d(x,y)^2}{4(t-s)}\right)$$

となる．

6. 発展

最後に，今後の発展の可能性について簡単に述べる．

- 前節では Bochner-Weitzenböck 公式の解析的な応用のみを述べたが，リーマン多様体の場合のように幾何学的な応用もあるはずである．これについては引き続き研究中である．

- これまで見てきたように，重みつきリッチ曲率は一般のフィンスラー多様体の研究に役に立つ．次はこれを，具体的な空間の研究に生かしたい．例えば，ヒルベルト幾何やタイヒミュラー空間の重みつきリッチ曲率はどうなっているだろうか？測度は何を考えるべきか？

- フィンスラー多様体の理論を，バナッハ空間の幾何学に応用したい．両者は扱う空間の類似性にも関わらず，接点があまりなかった．例えば，曲率次元条件の応用で触れた測度の集中はバナッハ空間の幾何学でもよく研究されている．

- フィンスラー計量はラグランジアンの一種とも考えられ，ラグランジアンに対応するコストを用いた最適輸送問題は力学系とも関連して研究されている．では，リッチ曲率の理論を一般のラグランジアンに対して展開することは可能であろうか？

参考文献

[BE] D. Bakry and M. Émery, Diffusions hypercontractives (French), Séminaire de probabilités, XIX, 1983/84, 177–206, Lecture Notes in Math. **1123**, Springer, Berlin, 1985.

[BCS] D. Bao, S.-S. Chern and Z. Shen, An introduction to Riemann-Finsler geometry, Springer-Verlag, New York, 2000.

[Da] E. B. Davies, Heat kernels and spectral theory, Cambridge University Press, Cambridge, 1989.

[EE] J. C. Earle and J. Eells, On the differential geometry of Teichmüller spaces, J. Analyse Math. **19** (1967), 35–52.

[Eg] D. Egloff, Uniform Finsler Hadamard manifolds, Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor. **66** (1997), 323–357.

[Ku] K. Kuwada, Duality on gradient estimates and Wasserstein controls, J. Funct. Anal. **258** (2010), 3758–3774.

[Lo] J. Lott, Some geometric properties of the Bakry-Émery-Ricci tensor, Comment. Math. Helv. **78** (2003), 865–883.

[LV1] J. Lott and C. Villani, Weak curvature conditions and functional inequalities, J. Funct. Anal. **245** (2007), 311–333.

[LV2] J. Lott and C. Villani, Ricci curvature for metric-measure spaces via optimal transport, Ann. of Math. **169** (2009), 903–991.

[Oh1] S. Ohta, Finsler interpolation inequalities, Calc. Var. Partial Differential Equations **36** (2009), 211–249.

[Oh2] S. Ohta, Vanishing S-curvature of Randers spaces, Differential Geom. Appl. **29** (2011), 174–178.

[OS1] S. Ohta and K.-T. Sturm, Heat flow on Finsler manifolds, Comm. Pure Appl. Math. **62** (2009), 1386–1433.

[OS2] S. Ohta and K.-T. Sturm, Non-contraction of heat flow on Minkowski spaces, Preprint (2010). Available at arXiv:1009.2312

[OS3] S. Ohta and K.-T. Sturm, Bochner-Weitzenböck formula and Li-Yau estimates on Finsler manifolds, Preprint (2011). Available at arXiv:1104.5276

[Qi] Z. Qian, Estimates for weighted volumes and applications, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) **48** (1997), 235–242.

[vRS] M.-K. von Renesse and K.-T. Sturm, Transport inequalities, gradient estimates, entropy and Ricci curvature, Comm. Pure Appl. Math. **58** (2005), 923–940.

[ST] Y.-B. Shen and H. Tian, Measurable (α,β)-spaces with vanishing S-curvature, Preprint (2011).

[Sh] Z. Shen, Lectures on Finsler geometry, World Scientific Publishing Co., Singapore, 2001.

[St1] K.-T. Sturm, Convex functionals of probability measures and nonlinear diffusions on manifolds, J. Math. Pures Appl. **84** (2005), 149–168.

[St2] K.-T. Sturm, On the geometry of metric measure spaces. I, Acta Math. **196** (2006), 65–131.

[St3] K.-T. Sturm, On the geometry of metric measure spaces. II, Acta Math. **196** (2006), 133–177.

[Vi] C. Villani, Optimal transport, old and new, Springer-Verlag, 2009.

[Wo] S. Wolpert, Noncompleteness of the Weil-Petersson metric for Teichmüller space, Pacific J. Math. **61** (1975), 573–577.

[太田] 太田 慎一, 確率測度の空間の幾何学, 数学 第63巻 (2011), 21–42.